TENGSIZLIKLARDA NORMALLASHTIRISH USULI VA UNING TATBIQLARI

Kamoliddinov Davlatjon Utkirxon o‘g‘li
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti,
matematika fakulteti,1-bosqich magistranti
kamoliddinovdavlatjon@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ba’zi tengsizliklarni odatiy usullar orqali isbotlashda birmuncha qiyinchiliklar tug‘diradi. Biz ushbu maqolada bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tengsizliklar orasida bog‘lanishlarni tahlil qilamiz va normallashtirish usuli orqali tengsizliklarni isbotlash jarayonini oson hal etish bosqichlarini keltirib o‘tamiz. Berilgan tengsizliklar bir jinsli bo‘lgan holatda unga qo‘shimcha shart kiritish mumkinligi va buning sabablari maqolada to‘liq keltiriladi.

Kalit so‘zlar: *bir jinsli tengsizlik, bir jinsli bo‘lmagan tengsizlik, koshi tengsizligi, normallashtirish.*

METHOD OF NORMALIZATION IN INEQUALITIES AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT

Some inequalities are difficult to prove by conventional methods. In this article, we will analyze the connections between homogeneous and non-homogeneous inequalities and give easy steps to solve the process of proving inequalities by the normalization method. Given inequalities in the case of homogeneous, an additional condition can be added to it, and the reasons for this are given in full in the article

Keywords: *homogeneous inequality, non-homogeneous inequality, Cauchy inequality, normalization.*

KIRISH

Normallashtirish usuli asosan simmetrik tengsizliklarni isbotlashda keng qo‘llaniladi va asosan xalqaro matematika olimpiadalarida keltirilgan murakkab turdagi tengsizliklarni isbotlashda birmuncha amaliy tatbiqlarga ega. Biz normallashtirish usulini o‘rganishdan oldin bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan funksiyalar sinfini ba’zi tushunchalarini ko‘rsatib o‘tamiz.

Aytaylik f funksiya, n ta $a_1, a_2, a_3 \dots \dots a_n$ o‘zgaruvchilarning funksiyasi bo‘lsin.

Ta’rif: Agar $\exists\ k \in R$ topilib quyidagi

$$f(ta_1, ta_2, \dots\dots ta_n) = t^k f(a_1, a_2, \dots\dots a_n), \quad \forall t,\ \ a_1, a_2, \dots\dots a_n \in R$$

tenglik bajarilsa, f ga bir jinsli funksiya deyiladi,

Biz avval bir jinsli bo'lmagan tengsizliklarni bir jinsli ko'rinishga keltirib isbotlash jarayonini ko'rib chiqamiz.

1-masala. Ushbu $a^2+b^2+c^2=3$ tenglikni qanoatlaniruvchi a,b,c nomanfiy haqiqiy sonlar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)\le 6 \tag{1}$$

Yechilishi: Ma'lumki, (1) tengsizlik bir jinsli emas. Ammo berilgan tenglikdan foydalanib, tengsizlikni bir jinsli ko'rinishga keltirib olishimiz mumkin;

$$a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)\le \frac{2}{3}(\,a^2+b^2+c^2)^2$$

Bu tengsizlikni siklik belgilardan foydalanib quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$2\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}a^2b^2\ge 3\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)$$

bu yerda,

$$\sum_{cyc}a^4=a^4+b^4+c^4,\quad \sum_{cyc}a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2,$$

$$\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)=ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ac(a^2+c^2)$$

Osongina ko'rsatish mumkinki, yuqoridagi tengsizlik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\sum_{cyc}(a-b)^4+3\sum_{cyc}ab(a-b)^2\ge 0$$

Bu tengsizlik esa barcha a,b,c nomanfiy haqiqiy sonlar uchun bajarilishi ravshan. (1) tengsizlik isbotlandi va tenglik sharti $a=b=c=1$ da bajariladi.

Yuqorida keltirib o'tilgan masalada bir jinsli bo'lmagan tengsizlikni bir jinsli shaklga keltirib isbotlash jarayonini ko'rib chiqdik. Lekin teskarisi haqida nima deyish mumkin? Agar biz bir jinsli tengsizlikni bir jinsli bo'lmagan tengsizlikka o'zgartirsak qanday holatlarga duch kelamiz? Unda biror natijaga ega bo'lamizmi?

Endi biz quyidagi masalada normallashtirish usulini to'liq tahlil qilamiz.

2-masala. Aytaylik a,b,c nomanfiy haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}}$$

Isbot: Faraz qilaylik, $ab+bc+ac=3$ bo'lsin. U holda Koshi tengsizligiga asosan quyidagi natijalarni olamiz;

$$a+b+c\ge 3 \text{ va } abc\le 1.$$

Ko'rinib turibdiki,

$(a+b)(b+c)(a+c)=(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc\geq 3\cdot 3-1=8.$

Bundan esa isbotlanishi talab etilgan tengsizlikni osongina ko‘rsatish mumkin,

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}}=1\leq\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}}.$$

Shunday qilib, $ab+bc+ac=3$ holda berilgan tengsizlik isbotlandi va tenglik sharti $a=b=c$ da bajariladi.

Endi yuqorida ko‘rib o‘tgan masalamizning yechilish jarayonini tahlil qilamiz.

Biz faraz qilgan $ab+bc+ac=3$ shart qo‘shimcha ravishda kiritilganligi ma’lum va shu yerda savol tug‘iladiki, nima uchun shunday qo‘shimcha shart kirita olamiz?

Aslida, $ab+bc+ac=3$ shartni qanoatlantirmaydigan $a=b=c=0$ lar uchun ham berilgan tengsizligimiz o‘rinli bo‘ladi. Ma’lumki, berilgan tengsizligimiz bir jinsli. Biz quyidagi almashtirishni bajara olamiz.

$$a'=\frac{a}{t},\quad b'=\frac{b}{t},\quad c'=\frac{c}{t}\qquad (t>0)$$

Almashtirishdan xulosa qilishimiz mumkinki isbotlanishi talab etilayotgan tengsizlik

a,b,c lar uchun bajariladi faqat va faqat a',b',c' lar uchun bajarilganda. Agar $t>0$ sonni aynan $t=\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}}$ kabi tanlasak, u holda $a'b'+a'c'+b'c'=3$ bo‘ladi. Natijada bu hol oldingi isbot qilingan holga keltirildi. Tengsizlik to‘liq isbotlandi.

Odatda bunday usullarga normallashtirish usuli deyiladi.

Normallashtirish usuli bir jinsli tengsizliklar uchun keng qo‘llaniladi, chunki ana shunday turdagi tengsizliklar berilgan masalani qulay hal etuvchi qo‘shimcha shartlar kiritish imkoniyatini beradi. Buni quyidagi masala misolida ham ko‘rishimiz mumkin.

3-masala (USA MO 2003). a,b,c nomanfiy haqiqiy sonlar uchu quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(b+a)^2}\leq 8$$

Isbot: Normallashtirishni tatbiq etish orqali $a+b+c=3$ shart qo‘shimcha ravishta kiritsak, tengsizlikning quyidagi soddaroq formasiga ega bo‘lamiz.

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}$$

Hosil bo‘lgan ifodaning har bir hadini tahlil qilib quyidagini topishimiz mumkin.

$$\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}=1+\frac{8a+6}{(a-1)^2+2}\leq 1+\frac{8a+6}{2}=4a+4$$

$$\sum_{cyc}\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le\frac{1}{3}\left(12+4\sum_{cyc}a\right)=8$$

Tengsizlik to‘liq isbotlandi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Evan Chen. A brief introduction to Olympiad inequalities.April 30,2014
2. Yufei Zhao.Inequalities,winter camp 2008
3. Barbeau, E.J. Shawyer, B.L.R. Inequalities. A taste of Mathematics, vol 4, 2000
4. Andreescu, T. Enescu, B. Mathematical Olympiad Treasures. Berkhauser, 2004
5. Andreescu, T. Old and New inequalities
6. Zdravko Cvetkovski. Inequalities. Theorems,Techniques and Selected Problems
7. Thomas J. Mildorf. Olympiad Inequalities. January 20, 2006
8. Vasile Cirtoaje. Algebraic Inequalities: old and new methods