Innovative Development in Educational Activities ISSN: 2181-3523 VOLUME 3 | ISSUE 1 | 2024
Scientific Journal Impact Factor (SJIF): 5.938 http://sjifactor.com/passport.php?id=22323

ШӘРТЛИ ЭКСТРЕМУМ МӘСЕЛЕЛЕРИН ЛАГРАНЖДЫҢ КӨБЕЙТИЎШИЛЕР УСЫЛЫ МЕНЕН ШЕШИЎ

Ж.П.Алланазаров
Ажинияз атындағы НМПИ доценти

АННОТАЦИЯ

Мақалада Лагранж көбейтиўшилер усылы ҳәм Лагранждың улыўмаласқан көбейтиўшилер усылы алгоритмлери берилген ҳәм усылды қолланылыў жолы мысалда көрселген.

В статье дано алгоритмы метода множителей Лагранжа и метода обобщенного множителей Лагранжа и показаны пути применения метода на примере.

The article provides algorithms for the Lagrange multiplier method and the generalized Lagrange multiplier method and shows ways to apply the method by example.

Шәртли экстремум мәселелерин қарағанда Лагранждың көбейтиўшилериниң тутатуғын орнын анық түсиниў үлкен әҳмийетке ийе болады. Әдетте Лагранждың көбейтиўшилери шеклеўлери теңлемелер болған шәртли экстремум мәселелерине байланыслы киргизиледи.

Усыларды есапқа алып, шеклеўлери теңсизликлер ямаса теңлемелер ҳәм теңсизликлер болған шәртли экстремум мәселелерин шешиў усылларын үйрениўди жеңиллестириў мақсетинде, дәслеп Лагранждың көбейтиўшилер усылының тийкарлары баянланады. Соңынан Лагранждың көбейтиўшилерин, мәселениң $x^* = \left(x_1{}^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)'$ оптималлық шешиминиң, оның шеклеўлериниң қәтелигин сезиў коэффицентлери есабында түсиниўге болатуғынлығы көрсетиледи. Буннан тысқары, Лагранж көбейтиўшилерине, дәслепки берилген мәселеге қосарлы мәселениң өзгериўшилери есабында қараўға болады. Бул жағдайлар Лагранж көбейтиўшилерине экономикалық мәнис бериўге мүмкиншилик туўдырады.

1. *Шеклеўлери теңликлер түриндеги мәселелерди Лагранждың көбейтиўшилер усылы менен шешиў.*

Бул жерде дәслеп Сызықлы емес программадастырыў (СЕП) тиң улыўма мәселесиниң дара жағдайы болған, шеклеўлер системасы тек теңлемелерден дүзилген ҳәм өзгериўшилериниң терис болмаў шәртлери берилмеген мына мәселени қараймыз:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min, \quad (1)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, i = \overline{1, m} \quad (2)$$

Бунда $f(x) = f(x_i, x_2, \dots, x_n)$ ҳәм $g_i(x) = g_i(x_i, x_2, \dots, x_n)$өзлериниң керекли тәртипли дара туўындылары менен бирге үзликсиз функциялар деп уйғарылады, ал $b_i(i = 1, \overline{m})$ алдын ала берилген санлар.

Математикалық анализ курсында (1)-(2) мәселесин *шәртли экстремум мәселеси* ямаса *оптимизациялаўдың классикалық мәселеси* деп атайды. Себеби бул мәселениң шеклеўлери тек теңлемелерден ибарат болғанлықтан, оны көп өзгериўшили функцияның шәртли экстремумын табыўдың классикалық усылларынан пайдаланып шешиўге болады. Мәселен, Лагранждың көбейтиўшилер усылы (1)-(2) шәртли экстремум мәселесин шешиўге мүмкиншилик береди. Бул усылдың тийкарғы мәниси, арнаўлы жасалған Лагранж функциясынан пайдаланып, шәртли эксремум мәселесинен шәртсиз экстремум мәселесине өтиў болады. Буның ушын, (1)-(2) мәселесиниң шеклеўлериниң санына байланыслы, *Лагранж көбейтиўшилери* деп аталатуғын $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ өзгериўшилерин киргизип, *Лагранждың мына функциясын дүзеди*:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (3)$$

Лагранж функциясының ис жүзинде үлкен әҳмийетке ийе болған мынадай жақсы қәсийети бар. Егерде $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ноқаты (1)-(2) мәселесиниң мүмкин болған D областына дерек болса, онда (3) деги екинши қосылыўшы нольге тең болады. Сонлықтан, егерде $x \in D$ болса, онда $L(x, \lambda) = f(x)$болады. Демек, (1)-(2) мәселесиниң мүмкин болған шешимлериниң Dобластындағы $f(x)$ функциясы қандай мәнислерге ийе болса, Лагранж функциясы да тап сондай мәнислерге ийе болады. Ал, бул областың сыртында $L(x, \lambda) \neq f(x)$ болады. Буннан, (1)-(2) шәртли экстремум мәселесин шешиўди Лагранждың (3) функциясының шәртсиз экстремумын табыў мәселеси менен алмастырыўға болатуғынлығы келип шығады. Соңғы мәселени шешиў ушын Лагранждың (3) функциясының шәртсиз экстремумға ийе болыўының биринши тәртипли зәрүрли шәртлеринен пайдаланып, $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ $n + m$ белгисизли $n + m$ теңлемелердиң мына системасына ийе боламыз:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = 1,2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) = 0, i = 1,2,\dots,m$$

Солай етип, (1)-(2) шәртли экстремум мәселесин шешиўди, Лагранж функциясынан пайдаланып, улыўма жағдайда сызықлы емес теңлемелердиң (4) системасын шешиўге келтириў *Лагранждың көбейтиўшилер усылы* деп аталады.

Теңлемелердиң (4) системасының шешимлерин табыў ушын, улыўма жағдайда, итерациялық усыллардан пайдаланыў мүмкин. Гейпара мәселелер ушын (4)системасы шешимлерге ийе болмаўы мүмкин. Бундай жағдайларда берилген мәселени Лагранждың көбейтиўшилер усылы менен шешиў мүмкин болмайды. Бирақта бундай мәселелер есаплаў практикасында оғада сийрек ушырасады.

Соңғы системаның хәр қандай $\overline{x} = (\overline{x_i}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ шешими *f(x)* функциясының *шәртли стационарлық ноқаты* деп аталады. Шәртсиз экстремум мәселеси жағдайындағы сыяқлы, биринши тәртипли зәрүрли шәртлер шәртли-стационарлық ноқатлардың сыпатын анықламайды. Сонлықтан (1)-(2) мәселеси ушын шәртли экстремумның жеткиликли шәртлерин келтиремиз.

Мейли $\{\overline{x}, \overline{\lambda}\}\left(\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}), \overline{\lambda} = \left(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda m}\right)\right)$ (4) системасының шешими хәм $g_i(x)(i = 1, \overline{m})$ функцияларының Якоби матрицасының анықлаўшысы $\overline{x}$ ноқатында нольден өзгеше болсын:

$$J(\overline{x}) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ ------ \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right|_{x=\overline{x}} \neq 0 \quad (5)$$

Бул мағлыўматлардан пайдаланып, *f(x)* функциясының $\overline{x}$ ноқатындағы хәм оған жақын мүмкин болған $\overline{x} + h$ ноқатындағы мәнислериниң арасындағы қатнасларды анықлаймыз. Уйғарыўымыз бойынша, $\overline{x}$ ноқаты менен салыстырылатуғын $\overline{x} + h$ ноқатлары (2) теңлемелериниң системасын қанаатландырыўы керек $\left(g_i(\overline{x}) - b_i = 0, g_i(\overline{x} + h) - b_i = 0, i = \overline{1, m}\right)$. Енди *f(x)* функциясының өсимин Лагранж функциясының өсими менен алмастырамыз. Сонда мына теңликке келемиз:

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = L\left(\overline{x} + h, \overline{\lambda}\right) - L\left(\overline{x}, \overline{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}\left(\overline{x}, \overline{\lambda}\right) \rightleftarrows h_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\left(\overline{x}, \overline{\lambda}\right) h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad (6)$$

Бунда $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) - n$өлшемли вектор. Соңғы теңликтиң оң жағындағы биринши қосылыўшы (4) ниң биринши теңлемеси бойынша нольге тең. Сонлықтан (6) төмендеги көринисте жазылады:

$$f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x},\overline{\lambda}) \rightleftarrows h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad (7)$$

Сондай-ақ, h ноқаты да теңлемелердиң (2) системасын қанаатландыратуғынлықтан $(g_i(h)-b_i=0, i=\overline{1,m})$, $g_i(x)(i=\overline{1,m})$ функцияларының $\overline{x}$ ноқатының дөгерегинде Тейлор қатарына жиклениўин төмендегише жазыўға болады:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_k(\overline{x})}{\partial x_i}h_i + O(\|h\|^2), k=1,2,\ldots,\rightleftarrows m$$

Бундағы екинши киши қосылыўшыны есапқа алмай, мына сызықлы жуўықласыўға ийе боламыз:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_k(\overline{x})}{\partial x_i}h_i=0, \quad k=1,2,\ldots,m \quad (8)$$

Бул теңлеме хәр бир $к$ ушын $g_k(x)-b_k=0$ шеклеўиниң бетине $\overline{x}$ ноқатында урынатуғын гипертегисликти анықлайды. Сонлықтан (1)-(2) мәселесинде экстремумның екинши тәртипли зәрүрли хәм жеткиликли шәртлери

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x},\overline{\lambda})\ h_i h_j \quad (9)$$

квадратлық формасының белгисиниң анықланыўы менен байланыслы болады. Шәртли стационарлық ноқат локальлық шәртли минимум ноқаты болыўы ушын (9) квадратлық формасының терис емес анықланыўы зәрүрли хәм бул форманың оң анықлаўы жеткиликли болады.

Солай етип, (1)-(2) шәртли минимум мәселесин Лагранждың көбейтиўшилери усылы менен шешиў төмендегише иске асырылады:

1. Лагранждың (3) функциясын дүзеди;
2. Лагранж функциясының шәртсиз минимумға ийе болыўының биринши тәртипли зәрүрли шәртлеринен пайдаланып, теңлемелердиң (4) системасын дүзеди;
3. Теңлемелердиң (4) системасын туўры ямаса итерациялық усылларды қолланып шешип, шәртли стационарлық ноқатларды табады;
4. $L(x,\lambda)$ функциясының шәртсиз минимумға ийе болыўының екинши тәртипли зәрүрли хәм жеткиликли шәртлеринен пайдаланып, оның минимум ноқатларын анықлайды;
5. Минимум ноқатларындағы *f(x)* функциясының минимум мәнислерин есаплайды.

2. *Лагранждың улыўмаласқан көбейтиўшилер усылы.*

Бул жерде шеклеўлери теңсизликлер менен берилген СЕП мәселесин шешиўге Лагранждың көбейтиўшилер усылы улыўмаластырылады.

Мейли, мына СЕП мәселеси берилген болсын:

$$f(x) = f(x_1, x_2 \dots, x_n) \to min, \qquad (10)$$

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2 \dots, x_n) \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad (11)$$

Егерде $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \ge 0$ шеклеўлери бар болса, онда олар (11) шеклеўлерине киргизилген деп уйғарылады.

Мәселениң мақсет функциясының x^*минимум ноқатында (11) теңсизлиги теңлик ямаса қатаң теңсизлик болып орынланыўы мүмкин.

Анықлама. Егерде $g_i(x) \le b_i$ теңсизлик шеклеўи мәселениң x^* минимум ноқатында $g_i(x^*) = b_i$ қатаң теңлик болып орынланса, онда ол *актив* ямаса *байланыстырыўшы шеклеў деп*, ал $g_i(x^*) < b_i$қатаң теңсизлик болып орынланса, онда ол *актив емес* ямаса *байланыстырмайтуғын шеклеў* деп аталады.

Берилген мәселени шешиўге киристестен бурын, оның минимум ноқатында актив емес шеклеўлерди анықлаў мүмкин болса, онда бундай шеклеўлерди есапқа алмай, қойылған мәселениң өлшемлерин киширейтиўге, яғный оны жеңилирек шешилетуғын басқа мәселе менен алмастырыўға болады. Биракта көпшилик жағдайларда берилген мәселени шешпестен бурын, оның бундай шеклеўлерин алдын ала анықлаў мүмкин бола бермейди.

Енди Лагранждың көбейтиўшилер усылынан пайдаланып, (10)-(11) мәселесиниң экстремумының зәрүрли шәртлерин келтирип шығарамыз. Буның ушын (10)-(11) мәселесин алдын ала шеклеўлери теңлемелер болған (1)-(2) мәселеси көринисине келтирип жазамыз. Усы мақсетте (11) теңсизлик шеклеўлериниң хәр бирине терис емес $u_i^2 (i = 1, \overline{m})$ жәрдемши белгисизлерин қосып, оларды теңлик көринисине келтиремиз: $g_i(x) + u_i^2 = b_i$ ямаса

$$g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0, i = \overline{1,m} \qquad (12)$$

Солай етип, бул жағдайда да берилген (10)-(11) мәселесин шешиўди шеклеўлери теңликлер болған мына мәселени шешиў менен алмастырыўға болады:

$$f(x) \to min, \qquad (13)$$

$$g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0, i = \overline{1,m} \qquad (14)$$

Соңғы (13)-(14) мәселесин шешиўге Лагранждың көбейтиўшилер усылын қолланыўға болады. Бул мәселеге сәйкес Лагранж функциясы төмендеги көриниске ийе болады:

$$L(x,\lambda,u)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i-g_i(x)-u_i^2] \qquad (15)$$

Сонда (15) функциясының экстремумға ийе болыўының биринши тәртипли зәрүрли шәртлери төмендегише жазылады:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0, j=\overline{1,n}, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=b_i-g_i(x)-u_i^2=0, i=\overline{1,m}, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}=2\lambda_i u_i=0, i=\overline{1,m} \qquad (18)$$

Бундағы соңғы теңлемени $u_i/2$ге көбейтип, мына теңлемеге келемиз: $\lambda_i u_i^2=0$, яғный

$$\lambda_i[b_i-g_i(x)]=0, i=\overline{1,m} \qquad (19)$$

Усылайынша келип шыққан (16), (17) ҳәм (19) теңлемелери (14) шеклеўлери бар болғанда x^* ноқатында *f(x)* функциясының минимумға ийе болыўының *биринши тәртипли зәрүрли шәртлери* болады. Ал, (17) теңлемеси (14) шеклеўиниң қайталап жазылыўы болады. Сондай ақ, (19) теңлемеси я $\lambda_i=0$, ямаса $b_i-g_i(x^*)=0$ болатуғынын, ямаса $\lambda_i=0$, $g_i(x^*)=b_i$ теңликлериниң бир ўақытта орынланатуғынын аңлатады. Егерде $\lambda_i\neq 0$ болса, онда $g_i(x^*)=b_i$ ҳәм (11) шеклеўи x^* ноқатында актив шеклеў болып, ол теңлик түриндеги шеклеўди аңлатады. Егерде x^* ноқатында $g_i(x^*)<b_i$ қатаң теңсизлиги орынланса, онда $\lambda_i=0$ болады ҳәм (11) шеклеўи x^* ноқатында актив емес болып, оған итибар бермеў мүмкин. Әлбетте, қайсы шеклеўлерди есапқа алмаўға болатуғынлығы алдын ала белгисиз болады.

Бирақта, бул жерде мынаны айрықша атап өтемиз: Лагранждың көбейтиўшилерине, мәнислери мәселениң шеклеўлери орынланғандай етип сайлап алынатуғын параметр есабында қараўға болады. Экономикалық көз қарастан Лагранждың көбейтиўшилери мәселениң шеклеўлери менен анықланатуғын ресурслардың (қорлардың) *анық емес баҳасы* есабында түсиниледи. Сонлықтан бул көбейтиўшилердиң оптималлық мәнислери мәселениң шешиминиң өзгериўин таллағанда үлкен рол ойнайды. Усы себепли, шәртли минимум мәселеси берилген жағдайда x^* минимум ноқатында қосымша $\lambda_i\geq 0$ шәрти орынланады деп уйғарылады.

Буны төмендегише тийкарлаўға болады. Мейли x^*-(13)-(14) мәселесиниң минимум ноқаты, ал $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*)$ - Лагранж көбейтиўшилериниң x^* ноқтына сәйкес мәнислери болсын. Улыўма жағдайда $x_j^*(j=\overline{1,n})$ ҳәм $\lambda_i^*(i=\overline{1,m})$, мәселениң шеклеўлерине қатнасатуғын $b_i^*(i=\overline{1,m})$ санларынан ғәрезли болады. Мейли, барлық x_j^* ҳәм λ_i^* лар $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)'$ векторының үзликсиз дифференциалланатуғын функциялары болсын. Сонда $Z = f(x^*)$ глобальлық минимумының b_iлердиң өзгериўине байланыслы өзгериўи $\partial Z/ \partial b_i$ дара туўындылары менен анықланады. Сонлықтан қурамалы функцияны дифференциаллаў қәдеси бойынша мына теңликти жазыўға болады:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j^*} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} \tag{20}$$

Сондай ақ, $g_k(x) + u_k^2 = b_k$ болғанлықтан

$$\frac{\partial g_k}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j^*} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = \delta_{ik}$$

ямаса

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j^*} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = 0, i, k = 1,2, \dots, m \tag{21}$$

болады. Бунда δ_{ik} - Кронекер белгилеўи: $\delta_{ik} = 0, i \neq k; \delta_{ik} = 1, \rightleftarrows i = k.$

Енди (21)-ни λ_k^*ға көбейтип, k бойынша қосындыға өтемиз ҳәм келип шыққан нәтийжени (20)ға қосамыз. Соның нәтийжесинде мына теңликке келемиз:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \delta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j^*} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial x_j^*}\right] \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} \tag{22}$$

Бунда x^* ҳәм λ^* ноқатлары (16) теңлемесин қанаатландыратуғынлықтан, (22) деги екинши қосылыўшы нольге тең болады ҳәм оны төмендегише жазыўға болады:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*, i = \overline{1, m} \tag{23}$$

Буннан мынадай жуўмаққа келемиз: мәселениң шеклеўлериниң оң жақларының өзгериўине байланыслы *f(x)* функциясының экстремум мәнисиниң өзгериў тезлиги Лагранж көбейтиўшилериниң экстремум мәнислери менен анықланады. Сондай ақ, $b_i(i = \overline{1, m})$ лердиң өсиўи менен мәселениң мүмкин болған шешимлериниң D областы кеңейеди. Буннан мәселениң мақсет функциясының мәниси киширеймейди. Демек

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} \geq 0, \lambda_i^* \geq 0, i = \overline{1, m} \tag{24}$$

болады.

Усы жағдайларды есапқа алып, (10) –(11) мәселесиниң минимумының биринши тәртипли зәрүрли шәртлерин төмендегише жазыўға болады:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}, (a)$$

$$g_i(x) \le b_i, i = \overline{1,m}, (б)$$
$$\lambda_i[b_i - g_i(x)] = 0, i = \overline{1,m}, (в)$$
$$\lambda_i \ge 0, i = \overline{1,m}, (г) \qquad (25)$$

Лагранж функциясының жәрдеминде шеклеўлери теңсизликлер болған (10) – (11) СЕП мәселесин шешиўди сызықлы емес теңлемелер ҳәм теңсизликлердиң (25) системасын шешиўге келтириў, *Лагранждың улыўмаласқан көбейтиўшилер усылы* деп аталады.

Теңлемелердиң ҳәм теңсизликлердиң (25) системасы *Кун – Таккер шәртлери* деп, ал оларды қанаатландыратуғын хәр қандай $(x^*, \lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ ноқаты (10) – (11) СЕП мәселесиниң *шәртли – стационарлық ямаса Кун – Таккер ноқаты* деп аталады. Сондай ақ, (25 в) теңлиги *қатаң емесликти толықтырыў шәрти* деп аталады.

Мысалы. Төмендеги СЕП мәселесин Лагранждың көбейтиўшилер усылы менен шешиң:

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \to min \qquad (26)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1 + x_2 \ge 4 \qquad (27)$$

Шешилиўи. 1) Дәслеп бул мәселени (10) – (11) көрнисине келтирип жазамыз:

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \to min, \qquad (28)$$
$$-x_1 \le 0, -x_2 \le 0, -x_1 - x_2 \le -4 \qquad (29)$$

2) Бул (28) – (29) мәселесине сәйкес Лагранждың функциясын дүземиз ((15) функциясына қараң):

$$L(x, \lambda, u) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + \lambda_1(u_1^2 - x_1) + \lambda_2(u_2^2 - x_2) + \lambda_3(-x_1 - x_2 - 4) \qquad (30)$$

3) Сонда (30) функциясының минимумының (25) Кун – Таккер шәртлери төмендегише жазылады:

$$\begin{aligned} &6x_1 + 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ &4x_1 + 10x_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ &-x_1 \le 0, -x_2 \le 0, -x_1 - x_2 \le -4, \\ &\lambda_1 x_1 = 0, \lambda_2 x_2 = 0, \lambda_3(4 - x_1 - x_2) = 0, \\ &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 \end{aligned} \qquad (31)$$

4) Бул қатнаслардан пайдаланып, белгисизлердиң мәнислерин (шәртли – стационарлық ямаса Кун – Таккер ноқатларын) анықлаймыз: $x_1 = 3, x_2 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 22$; $(\overline{x}, \overline{\lambda}) = (3,1,0,0,22); \overline{x} = (3,1); \overline{\lambda} = (0,0,22)$.

5) $\overline{x} = (3,1)$ шәртли – стационарлық ноқатының сыпатын анықлаў ушын x_1, x_2 белгисизлери бойынша Гессе матрицасын жасап, оның $\overline{x} = (3,1)$ ноқатындағы белгисин анықлаў керек:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 6, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\, \partial x_2} = 4, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\, \partial x_1} = 4, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 10$$

Бул жағдайда Гессе матрицасы турақлы матрица болып, төмендеги көриниске ийе болады:

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \varDelta_1 = 6 \geq 0, \varDelta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 60 - 16 = 44 > 0$$

Демек, Сильвестр белгиси (өлшеми) бойынша (I баптың 1-§ ине қараң) Гессе матрицасы оң анықланған. Сонлықтан $\overline{x} = (3,1)$ шәртли – стационарлық ноқаты *f(x)* функциясының минимум ноқаты болады.

6) $\overline{x} = (3,1)$ минимум ноқатындағы *f(x)* функциясының минимум мәнисин есаплаймыз: $min\, f\,(x_1, x_2) = f(3,1) = 44$.

7) Берилген (26) – (27) мәселесиниң мүмкин болған шешимлериниң областы D ҳәм онда минимум ноқатының жайласыўы. Дара жағдайда, (27) шеклеўлери берилмегенде (26) функциясының минимум ноқаты $\overline{x} = (0,0)$ координаталар басы ҳәм бул ноқатта $min\, f\,(x) = f(0,0) = 0$ болады.

Әдебиятлар

1. Отаров А., Алланазаров Ж., Отаров А.О. Сызықлы емес программаластырыў мәселелерин шешиў усыллары. Нөкис. Билим. 2009.
2. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации.-Новосибирск: Наука,1981.