

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Сувонов Олим Омогнович

Доцент Навоийского государственного педагогического института

Аннотация. Предложен эвристический алгоритм метода статистических испытаний (Монте-Карло) согласно правилу “блуждания по решетке” и результаты вычислительных экспериментов в условиях функционирования нефтяных месторождений при заданных геолого-технических ограничениях.

Ключевые слова. Система, состояние, функция координат, многосвязная, дифференциальное уравнение, конечные разности, вероятность, блуждания по решетке, частицы, число испытаний, дебит, давление, фиктивная скважина, контур питания, алгоритм, вычислительный эксперимент.

Annotation. A heuristic algorithm for the method of statistical testing (Monte Carlo) according to the “walking on a lattice” rule and the results of computational experiments in the operating conditions of oil fields under given geological and technical restrictions are proposed.

Keywords. System, state, coordinate function, multiply connected, differential equation, finite differences, probability, lattice walks, particles, number of tests, flow rate, pressure, fictitious well, power circuit, algorithm, computational experiment.

Реализация на компьютере имитационных моделей стохастических распределенных объектов, моделей случайных полей, измеряемых векторов состояний объекта (систем, процесса) в условиях априорной неопределенности, а также имитационных схем адаптивных алгоритмов измерений (или реальных моделей) и источников погрешностей при исследовании их свойств приводит к необходимости использования, с одной стороны, стохастических моделей, а с другой – унифицированных, эффективных и оптимальных (в смысле вычислительной сложности) методов и алгоритмов и реализации[1,2].

Согласно вышеуказанных, в статье излагается постановка задачи и теоретико-вероятностная модель блуждания метода статистических испытаний(Монте-Карло) для анализа статических состояний системы “пласт-

скважина” (“П-С”) со стохастическими распределенными параметрами применительно к месторождениям нефти.

1. Пусть Ω – ограниченная область n - мерного пространства R^n , $\partial\Omega$ – гладкая граница области Ω , состоящая из внешнего контура Γ_0 и внутренних контуров $\Gamma_0, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, в которых могут быть заданы функции – источники.

В области Ω функционирует многосвязная система “П-С”, состояние которой характеризуется распределением давления $P = P(x_1, x_2)$, удовлетворяющего уравнению

$$L(P) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (K(x_i) \frac{\partial P}{\partial x_i}) + \delta(x)P(x), x \in \Omega, x = (x_1, x_2), \quad (1)$$

при граничных условиях

$$P = f_1 \text{ на } \Gamma_0, \quad (2)$$

где
$$\delta(x) = \begin{cases} 1, x \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, x \in \bar{\Gamma}_i \end{cases},$$

на внутренних контурах $\Gamma_i, i = \overline{1, n}$ могут быть заданы следующие условия:

$$P = f_2, x \in \Gamma_i, i = \overline{1, n_1} \quad (3)$$

или

$$\oint_{\Gamma_i} K \frac{\partial P}{\partial n} ds = q_i, i = \overline{n_1 + 1, n}. \quad (4)$$

Здесь $K = K(x)$ – стохастическая функция координат, представляющая комплекс фильтрационных параметров

$$K(x) = \frac{k(x)b}{\mu},$$

где b – мощность пласта, μ – динамическая вязкость жидкости, $k(x)$ – случайная функция координат, f_1, f_2 – заданные функции координат, q_i – заданный дебит скважины.

Прежде чем решить задачу (1) – (4) перейдем к дискретной модели объекта исследования, т.е. область Ω аппроксимируем сеточной областью Ω_{h_i, h_j} , а внутренние контуры Γ_i представим в качестве особых узлов.

При аппроксимации уравнения (1) используется пятиточечная схема, а для граничных условий (2) - (4) – уравнение неразрывности потока. Если на скважинах поддерживаются условия забойного давления, то эти узлы называются особыми узлами 1-го рода, а если условие заданного дебита скважины, то – узлами 2-го рода. Остальные внутренние точки сеточной области назовем обыкновенными узлами [3-5].

Пусть Ω_h - множество всех узловых точек, количество которых равно n ; Γ_h - множество внешних граничных узлов, количество которых равно m ; Ω_{bh} - множество особых узлов (где расположены скважины), количество которых равно $l = n_1 + n_2$.

Дифференциальное уравнение (1) аппроксимируем уравнениями в конечных разностях, при этом используем пятиточечные схемы с центральным узлом (i, j) и четырьмя соседними узлами, $(i + 1, j), (i, j + 1), (i - 1, j), (i, j - 1)$, которые соответственно обозначим через $(i, j)^0$ и $(i, j)^r, r = \overline{1, 4}$. Раскрывая скобки в (1) и разложив функции $P(x)$ и $K(x)$ в окрестности центральной точки $(i, j)^0$ по формуле Тейлора, после соответствующих преобразований будем иметь

$$P_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \left(\frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r} P_{ij}^r + R_{ij}^r \right) - \frac{h^2 E_{ij}^0}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r}, \tag{5}$$

где R_{ij}^r - остаточные члены разложений, имеющие, порядок малости не более $O(h^2)$

$$E_{ij}^0 = \delta_{ij} P_{ij}^0. \tag{6}$$

Многочисленные исследования [3,4,7] показали, что при замене истинной скважины точечной с тем же заданным дебитом давление P_{ij}^0 на ней будет соответствовать давлению фиктивной скважины с радиусом R_ϕ , зависящим от шага сетки h согласно соотношению

$$R_\phi / h = const. \tag{7}$$

Далее, рассматривая плоскорадиальную фильтрацию в призабойной зоне скважины с радиусом R_c , т.е. в области $R_c < r < R_\phi$, получаем формулу Дюпюи для определения истинного давления P_{ij}^c :

$$q_{ij} = \frac{(P_{ij}^o - P_{ij}^c) \frac{1}{4} \sum_{r=1}^4 K_{ij}^r}{\frac{1}{2\pi} \ln(R_\phi / R_c)}, \quad (8)$$

где $q_{ij}^0 = q_v$ - заданный дебит в точечной скважине с координатами (x_1, x_2) .

Принимая во внимание соотношение (7), получаем формулу, объединяющую три величины: дебит скважины q_{ij}^o , давление на скважине P_{ij}^c и фиктивное давление точечной скважины P_{ij}^o :

$$q_{ij}^o = (P_{ij}^o - P_{ij}^c) \eta_{ij}^o. \quad (9)$$

Здесь

$$\eta_{ij}^o = - \frac{\frac{1}{4} \sum_{r=1}^4 K_{ij}^r}{\frac{1}{2\pi} (\ln(R_c/h) + \ln(1/const))}$$

В соответствии с краевыми условиями на скважине известен дебит скважины q_{ij}^o или забойное давления $P_{ij}^o = f(x_{1i}, x_{2j})$. По этому, если решение P_{ij}^o найдено, то формула (9) позволяет найти третью величину: давление, если задан дебит или дебит, если задано давление. Таким образом, нам достаточно аппроксимировать краевые условия во внутренних особых узлах, рассматривая лишь краевые условия второго рода (4).

Следует отметить, что при аппроксимации (4) конечно-разностным уравнением интеграл в левой части есть суммарный приток через контур скважины с радиусом R_{ij}^c , определяющий дебит скважины q_{ij}^0 . Согласно изложенному, вместо истинной скважины можно принять точечную с тем же дебитом. Рассматривая суммарный приток к точечной скважине, согласно закону Дарси, получаем аппроксимацию краевого условия на скважине:

$$\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r (P_{ij}^r - P_{ij}^0) = q_{ij}^0.$$

Разрешая это уравнение относительно давления в особом узле, получаем

$$P_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \left(\frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r} P_{ij}^r \right) - \frac{q_{ij}^0}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r}.$$

Следовательно, аппроксимация краевых условий в особом узле 2-го рода ничем не отличается от уравнений в конечных разностях для обыкновенных узлов. Поэтому в (6) в место E_{ij}^0 можно подставить

$$E_{ij}^0 = q_{ij}^0 / h^2.$$

Для аппроксимации краевых условий в особом узле 1-го рода достаточно вместо E_{ij}^0 подставить его значение согласно (9).

Тогда

$$\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r (P_{ij}^r - P_{ij}^0) = \eta_{ij}^0 (P_{ij}^r - P_{ij}^c).$$

Разрешив это соотношение относительно P_{ij}^0 , получим

$$P_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r + \eta_{ij}^r} P_{ij}^r - \frac{\eta_{ij}^0}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r + \eta_{ij}^r} P_{ij}^c. \tag{10}$$

Поскольку аппроксимация краевых условий в особых узлах 1-го и 2-го рода практически не отличается от аппроксимации дифференциального уравнения в обыкновенном узле, то можно представить конечно-разностное уравнение для внутреннего узла следующим образом:

$$P_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r} P_{ij}^r - \frac{h^2 \bar{E}_{ij}^0}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r}, \tag{11}$$

где $\bar{E}_{ij}^0 = E_{ij}^0 + q_{ij}^0 / h^2$ - для обыкновенного узла.

Для узла 2-го рода q_{ij}^0 - известная величина, а поэтому уравнение (5) для 1-го рода имеет вид

$$P_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r + \eta_{ij}^r} P_{ij}^r - \frac{\eta_{ij}^r P_{ij}^c}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r + \eta_{ij}^0}. \quad (12)$$

Аппроксимация граничных условий осуществляется согласно приведенным в работе [8] правилам, где рассматривается уравнение неразрывности потока для элемента дискретной области.

Рассмотрим блуждание по узлам сеточной области частицы, выходящей из некоторого внутреннего узла $(i, j)^0$. Пусть в случае, когда $(i, j)^0$ обыкновенный узел или особый узел 2-го рода, частица из этого узла переходит с вероятностью $\beta_{ij}^r, r = \overline{1,4}$ в любой из четырех соседних с ним узлов. При этом потребуем, чтобы

$$\sum_{r=1}^4 \beta_{ij}^r = 1. \quad (13)$$

Пусть в случае, когда $(i, j)^0$ - особый узел 1-го рода, частица может либо перейти в любой из четырех соседних с ним узлов с вероятностью $\gamma_{ij}^r, r = \overline{1,4}$, либо остаться в нем с вероятностью γ_{ij}^0 . При этом потребуем, чтобы

$$\sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r + \gamma_{ij}^0 = 1. \quad (14)$$

Условия (13) и (14) обеспечивают достоверность выполнения указанных событий [3,9,11], причем, как видно, вероятность перехода в соседние узлы $(i, j)^r$ зависит от вида внутреннего узла $(i, j)^0$.

В соответствии с теорией применения метода Монте-Карло при численной реализации поставленной задачи будем считать, что для выбора направления блуждания достаточно моделирования соответствующих случайных процессов и интервале $(0,1)$. В силу того, что процесс блуждания, определяемый вероятностями перехода β_{ij}^r и γ_{ij}^r и вероятностью остаться γ_{ij}^0 , совершенно случайный, то правило, по которому определяется направление блуждания, может быть выбрано самыми разными способами. Однако фактическое направление будет определено случайными числами, равномерно распределенными в интервале $(0,1)$.

Для определенности проверим направление блужданий в том порядке, в котором пронумерованы соседние с $(i, j)^0$ узлы $(i, j)^r, r = \overline{1,4}$. Отложим отрезки,

равные вероятностям β_{ij}^r , начиная с левого края интервала $(0,1)$ последовательно для $r = \overline{1,4}$. Тогда получим, что отрезок $(0,1)$ разделен на 4 отрезка с длинами β_{ij}^r . Такое деление отрезка $(0,1)$ позволяет определить направление блужданий в зависимости от случайного числа. Действительно, если случайное число ξ попало на первый отрезок, включая правую границу, то можем считать, что случайное направления идет от $(i, j)^0$ в $(i, j)^1$. Если случайное число ξ попало на второй отрезок, включая его правую границу, то случайное направление идет от $(i, j)^0$ к $(i, j)^2$ и т.д. Таким образом, случайное S -е направление от $(i, j)^0$ к $(i, j)^S$, $S = \overline{1,4}$ будет иметь место при выполнении условия

$$\sum_{r=1}^{S-1} \beta_{ij}^r < \xi \leq \sum_{r=1}^S \beta_{ij}^r.$$

Если $S = 1$, то имеем

$$0 < \xi \leq \beta_{ij}^1,$$

а при $S = 4$

$$\sum_{r=1}^3 \beta_{ij}^r < \xi \leq 1.$$

Ясно, что выбранный порядок блуждания соответствует блужданию из обыкновенного узла или особого узла 2-го рода $(i, j)^0$. Аналогично можно построить порядок определения направлений блуждания из особого узла 1-го рода. При этом отрезок $(0,1)$ необходимо разделить на 5 частей в соответствии с вероятностями перехода γ_{ij}^r , $r = \overline{1,4}$ и вероятностью остаться γ_{ij}^0 . Общее правило для перехода, как и в предыдущем случае, вытекает из условия

$$\sum_{r=1}^{S-1} \gamma_{ij}^r < \xi \leq \sum_{r=1}^S \gamma_{ij}^r, s = \overline{1,4}.$$

Однако здесь

$$\sum_{r=1}^S \gamma_{ij}^r < 1.$$

Правило для того, чтобы остаться в узле (i, j) , вытекает из условия

$$\sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r < \xi \leq 1. \quad (15)$$

Будем считать, что на внешней границе области определения функции состояния системы заданы. Тогда, согласно теории Монте-Карло, блуждание заканчивается с неполной вероятностью при выходе частицы на граничный узел. Частица может остаться во внутреннем особом узле 1-го рода, если будет выполнено условие (15). Таким образом, каждому испытанию соответствуют случайные остановки во внутреннем узле 1-го рода или граничном узле. Покажем, что полученная конечно-разностная схема может быть поставлена в соответствие теоретико-вероятностная модель блуждания, характеризующая для каждого испытания некоторое случайное число, математическое ожидание которого является решением дискретной задаче [11]. Будем считать, что для произвольного внутреннего узла вероятности перехода определяются значения γ_{ij}^r при $\gamma_{ij}^r = \beta_{ij}^r$ для обыкновенных узлов.

Обозначим через $B_{ij}^{q_0}$ вероятность, что блуждающая частица, выходя $(i, j)^0$, остановится в особом узле 1-го рода $(i, j)^q$ или на границе. Применяя последовательно теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем

$$B_{ij}^q = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r B_{ij}^{q_r} + \delta_{ij}^{q_0} \gamma_{ij}^0, \quad (16)$$

где $\delta_{ij}^{q_0} = 1$, если $q = q_0$, или $\delta_{ij}^{q_0} = 0$, если $q \neq q_0$.

Обозначим через $C_{ij}^{g_0}$, математическое ожидание количества прохождения блуждающей частицы через внутренние узлы 2-го рода $(i, j)^g$ при соответствующем испытании блужданий из точки $(i, j)^0$.

Для попадания в особый узел 2-го рода $(i, j)^g$ частица должна пройти через соседние узлы, поэтому

$$C_{ij}^{g_0} = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r C_{ij}^{g_r} + \delta_{ij}^{g_0}, \quad (17)$$

где $\delta_{ij}^{g_0}$ равно 1 или 0, как и выше.

Пусть при каждом случайном прохождении частицы через внутренний особый узел 2-го рода $(i, j)^{g_0}$ фиксируется некоторое число $\varphi_{ij}^{g_0}$, а при случайном прекращении блуждания в особом узле 1-го рода или в граничном узле - некоторое число $T_{ij}^{q_0}$. Очевидно, что при каждом испытании имеем следующее значение случайного числа, математическое ожидание которого ищем:

$$T_{ij}^{q_0} = \sum_{g_0=1}^{n_2} C_{ij}^{g_0} \varphi_{ij}^{g_0}, \quad q_0 = \overline{1, (m+l)}.$$

Согласно теории вероятностей, математическое ожидание определяется в виде

$$Y_{ij}^{q_0} = \sum_{q_0=1}^{m+n} B_{ij}^{q_0} T_{ij}^{q_0} + \sum_{g_0=1}^{n_2} C_{ij}^{g_0} \varphi_{ij}^{g_0}. \quad (18)$$

Подставив в (18) выражения $B_{ij}^{q_0}$ и $C_{ij}^{q_0}$ из (16) и (17) получим

$$Y_{ij}^0 = \sum_{q=1}^{m+n} \left[\sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r B_{ij}^{q_r} + \delta_{ij}^{q_0} \gamma_{ij}^0 \right] T_{ij}^q + \sum_{g=1}^{n_2} \left[\sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r C_{ij}^{g_r} + \delta_{ij}^{g_0} \right] \varphi_{ij}^g,$$

или

$$Y_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \left[\sum_{q=1}^{m+n} B_{ij}^{q_r} T_{ij}^q + \sum_{g=1}^{n_2} C_{ij}^{g_r} \varphi_{ij}^g \right] \gamma_{ij}^r + \sum_{q=1}^{m+n} \delta_{ij}^{q_0} \gamma_{ij}^0 T_{ij}^q + \sum_{g=1}^{n_2} \delta_{ij}^{g_0} \varphi_{ij}^g. \quad (19)$$

Если сопоставить выражение в квадратной скобке (19) с формулой (18), то получим

$$Y_{ij}^r = \sum_{q=1}^{m+n} B_{ij}^{q_r} T_{ij}^q + \sum_{g=1}^{n_2} C_{ij}^{g_r} \varphi_{ij}^g. \quad (20)$$

Поэтому, подставляя (20) в (19), будем иметь

$$Y_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r Y_{ij}^r + \sum_{q=1}^{m+n} \delta_{ij}^{q_0} \gamma_{ij}^0 T_{ij}^q + \sum_{g=1}^{n_2} \delta_{ij}^{g_0} \varphi_{ij}^g. \quad (21)$$

Учитывая свойства $\delta_{ij}^{q_0}$ и $\delta_{ij}^{g_0}$, из (21) получаем

$$Y_{ij}^r = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r Y_{ij}^r + \gamma_{ij}^0 T_{ij}^0 + \varphi_{ij}^0. \quad (22)$$

Теперь легко показать, что формула (22), являющаяся математическим ожиданием случайного числа, соответствующего случайному блужданию частицы, идентична рассматриваемому представлению исходной краевой задачи. Для этого, естественно, уравнения (22) необходимо расшифровать для каждого узла сеточной области.

Очевидно, что в обыкновенных узлах $\gamma_{ij}^r = 0, \varphi_{ij}^0 = 0$. Тогда

$$Y_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r Y_{ij}^r. \quad (23)$$

В граничных узлах, согласно правилу блуждания, частица должна закончить блуждание с полной вероятностью $\gamma_{ij}^0 = 1$. Следовательно все $\gamma_{ij}^0 \equiv 0, (r = \overline{1,4}), \varphi_{ij}^0 \equiv 0$. Тогда из (22) получим

$$Y_{ij}^0 = T_{ij}^0. \quad (24)$$

В особых узлах 1-го рода $\gamma_{ij}^0 \equiv 0$. Следовательно,

$$Y_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r Y_{ij}^r + \gamma_{ij}^0 T_{ij}^0. \quad (25)$$

В особых узлах 2-го рода $\varphi_{ij}^0 \equiv 0$. Следовательно,

$$Y_{ij}^0 = \sum_{r=1}^4 \gamma_{ij}^r Y_{ij}^r + \varphi_{ij}^0. \quad (26)$$

Таким образом, дискретная форма математического ожидания случайного числа удовлетворяет конечно-разностным уравнениям и граничным условиям. Очевидно, что для идентичности формул (23) и (24), (25) и (26) с (11), (12) граничными условиями надо полагать:

$$\gamma_{ij}^r = \beta_{ij}^r = \frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r}, r = \overline{1,4},$$

$$\gamma_{ij}^r = \frac{K_{ij}^r}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r + \eta_{ij}^0}, r = \overline{1,4},$$

$$\gamma_{ij}^0 = \frac{\eta_{ij}^0}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r + \eta_{ij}^0}, \quad \varphi_{ij}^0 = \frac{h^2 E_{ij}^0}{\sum_{r=1}^4 K_{ij}^r},$$

$$T_{ij}^0 = f_{ij}^0, \quad f_{ij}^0 = f(x_{1i}, x_{2i}).$$

С помощью приведенной теоретико-вероятностной модели случайного блуждания можно построить алгоритм расчета значений функций состояния в узлах дискретной области. При каждом испытании блуждания из исходного узла, для которого ищется значение функции состояния, вырабатывается случайное значение искомого решения. Проведение многократных испытаний позволяет получить совокупность случайных значений искомого решения. Последнее дает возможность найти математическое ожидание прибытия элементарных частиц в узлах сеточной области, которое идентично приближенному решению поставленной задачи.

При выполнении одного испытания из исходного узла регистрируется качество попадания во внутренний обыкновенный, особый или граничный узлы первого рода, т.е. при случайном блуждании через внутренний или граничный узлы фиксируется попадание только один раз, независимо от остальных попаданий в данном испытании. Естественно, что выполняются все основные свойства случайного перехода, возможны остановки в особых узлах первого рода, возвращение из граничного узла второго рода и остановки в граничных узлах первого рода. При повторном испытании ситуация повторяется полностью.

В результате число фиксации посещения при случайном блуждании для обыкновенных и граничных узлов первого рода $(i, j)^r$ имеем

$$\sum_{S=1}^N \theta_{ij}^{rq_s} < N,$$

а для граничных узлов второго –

$$\sum_{S=1}^N \theta_{ij}^{rq_s} \geq N,$$

где $\theta_{ij}^{rq_s} = 1$, если для S -го испытания блуждание происходит через узел $(i, j)^r$ и прекратилось в особом узле первого рода или в граничном узле q_s . Здесь N – общее число испытаний.

Если случайное блуждание закончилось, что может быть лишь в особом узле первого рода или в граничном узле, то берется штраф по всей траектории блуждания случайного числа, равный значению функции в узле, в котором блуждание закончилось, а для особых узлов второго рода берется дополнительно штраф, равный значению функции в этих узлах. Очевидно, что условия перехода от одного узла к другому в классическом методе Монте-Карло остаются в силе и для этого эвристического подхода: фиксируется штраф для особого узла первого рода или штраф для узлов второго рода – как внутренних, так и внешних.

Теперь действует обычная формула метода Монте-Карло как математическое ожидание штрафов – граничных условий, заданных во внутренних и внешних узлах дискретной области.

Такая общая формула для приближенного расчета на множестве узлов дискретной области принимает вид

$$Y_{ij}^r = \frac{1}{N} \left[\sum_{q=1}^{m+n_1} N_{ij}^r T_{ij}^q + \sum_{g=1}^{n_2} \sum_{l=1}^N N_{ij}^{g_l} \varphi_{ij}^g \right],$$

где

$$N_{ij}^r = \sum \theta_{ij}^{rq_s}, \quad T_{ij}^q = T_{ij}^{q_s}.$$

Учитывая это, первое слагаемое можно привести к виду

$$\frac{1}{N} \sum_{q=1}^{m+n_1} N_{ij}^r T_{ij}^q = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \theta_{ij}^{rq_s} T_{ij}^{q_s}.$$

Этот эвристический способ использования метода Монте-Карло дает возможность определить значения функции во всех узлах дискретной области. В результате получается значительная экономия машинного времени и появляется возможность решения сложных задач оптимизации и управления разработкой нефтяных и газовых месторождений.

Практическая реализация на компьютере метода статистических испытаний в значительной степени зависит от качества программы получения псевдослучайных чисел, которые должны быть равномерно распределенными статистически независимыми, воспроизводимыми и неповторяющимися.

В настоящее время известно несколько специальных программ формирования псевдослучайных чисел в вычислительной машине. Они выбираются, исходя из двух требований: 1) формируемая последовательность чисел должна иметь заданную статистическую структуру (например, быть последовательностью независимых случайных величин с квазиравномерным распределением) и 2) количество операций, затрачиваемых на формирование

одного числа, должно быть небольшим [12]. Наиболее популярным является мультипликативный датчик псевдослучайных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, основанный на методе вычетов:

$$\alpha_{n+1} = \{M \square \alpha_n\}, \alpha_0 = 2^{-40},$$

где M - достаточно большое целое число, а фигурные скобки означают взятие дробной части. Большое распространение получили датчики $M = 5^{2p+1}$, где p - целое. При этом p выбирают максимальным из тех, для которых $5^{2p+1} < 2^m$, где m - число двоичных разрядов, отводимых для записи дробной части чисел в компьютере.

Как показывают исследования, псевдослучайные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, полученные при помощи такой процедуры, весьма близки к последовательности независимых случайных чисел с квазиравномерным распределением и на их формирование затрачивается небольшое количество машинных операций.

Основой настоящего алгоритма имитации псевдослучайных чисел является стабилизирующий механизм квантования автокорреляционной функции последовательности псевдослучайных чисел, полученной при помощи процедуры $\alpha_{n+1} = 5^{2p+1} \square \alpha_n, (\alpha_0 = 2^{-40})$.

Для сравнительного анализа и практического применения метода рассмотрим некоторые примеры, которые имеют точные решения.

Задача А. Требуется найти распределение давления жидкости и дебиты скважин в круговом пласте радиусом 600 м., мощностью 100 м. Пласт эксплуатируется центральной скважиной с радиусом 0,10 м, забойное давление которой равно 145 атм. Давление контура питания 160 атм, шаг сетки h равен 100 м.

Результаты расчетов для внутренних и граничных узлов сеточной области при числе испытаний $N = 1000$ и $N = 2100$ даны в таблице 1. В этой же таблице приводятся точные и приближенные значения функции состояний.

Сеточные узлы дискретной области Ω_h пронумерованы слева-направо, сверху-вниз.

На рис.1 приводится распределение числа посещений частиц, блуждающих через узел, фиксируемое при блужданиях из центральной точки с координатой (7.7). Число посещений блуждающих частиц вокруг особого узла больше, а вблизи граничных узлов намного уменьшается. Это связано с тем, что блуждание начинается с особого узла и сравнительно большое количество поглощений происходит в этой же точке.

Следует заметить, что результаты, полученные методом Монте-Карло, при сопоставлении с точными решениями оказались выше, чем результаты, полученные итерационным методом решения сеточных уравнений (табл.1) [1,9-11].

Дадим сравнительный анализ дебита центральной скважины. Дебит центральной скважины, согласно формуле Дюпюи, имеет следующий вид [3,14]:

$$q_{ij}^0 = \frac{(P_{ij}^k - P_{ij}^c) \square 2\pi kb}{\mu \ln(R_k / R_c)}$$

а с другой стороны, согласно формуле (9),-

$$q_{ij}^0 \approx \eta_{ij}^o (P_{ij}^o - P_{ij}^c),$$

где P_{ij}^k - значения функции в контуре пласта, P_{ij}^c - забойное давление, b - мощность пласта, k - коэффициент проницаемости, μ - вязкости жидкости, R_k - радиус контура питания, R_c - радиус скважины.

Таблица 1

| Номера узлов сеточной области | Точное значение функции состояния $P(x_1, x_2)$ | Приближенное значение функции состояния $P(x_1, x_2)$, полученное методом сеток | Значения функции состояния $P(x_1, x_2)$, полученные методом Монте-Карло | |
|-------------------------------|---|--|---|------------|
| | | | Число испытаний | |
| | | | $N = 1000$ | $N = 2100$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 8 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 12 | 159.0132 | 156.1742 | 159.3617 | 159.7436 |
| 13 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 18 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 23 | 159.9006 | 156.8901 | 158.8608 | 159.2063 |
| 24 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 30 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 36 | 148.1019 | 154.8701 | 158.2955 | 158.8040 |
| 37 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 43 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 49 | 157.7340 | 153.9176 | 157.8670 | 158.1699 |
| 50 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 55 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 56 | 156.7813 | 154.0193 | 157.3462 | 157.3077 |
| 57 | 156.0039 | 153.7054 | 156.5761 | 156.6667 |

| | | | | |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 62 | 157.9460 | 154.1542 | 157.2308 | 157.3971 |
| 63 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 65 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 68 | 159.0083 | 156.7543 | 159.1667 | 159.2228 |
| 69 | 156.9537 | 152.7815 | 156.6168 | 156.5296 |
| 70 | 154.0017 | 150.6421 | 153.6005 | 153.7007 |
| 73 | 156.9763 | 153.0017 | 156.5206 | 156.5574 |
| 75 | 159.8094 | 155.2903 | 159.1935 | 159.1979 |
| 76 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 81 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 82 | 158.0503 | 154.0291 | 157.8810 | 157.6571 |
| 83 | 156.8201 | 153.1345 | 157.6580 | 156.6026 |
| 88 | 157.9081 | 153.9054 | 160.0000 | 157.3996 |
| 89 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 95 | 160.0000 | 160.0000 | 158.4028 | 160.0000 |
| 101 | 158.9335 | 154.5806 | 160.0000 | 158.2543 |
| 102 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 108 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 114 | 159.2307 | 154.9701 | 160.0000 | 158.8799 |
| 115 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 120 | 160.0000 | 160.0000 | 159.4118 | 160.0000 |
| 125 | 159.8075 | 156.0154 | 160.0000 | 159.6000 |
| 130 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |
| 134 | 159.5403 | 155.7046 | 160.0000 | 159.8790 |
| 142 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 | 160.0000 |

В таблице 2 приведены результаты вычислительных экспериментов и дан сравнительный анализ численных значений дебита центральной скважины, полученных по точным формулам и методом Монте-Карло, а также приведено значение фиктивного давления точечной скважины при различных количествах испытаний N .

Анализ результатов показывает, что относительная погрешность дебита центральной скважины составляет от 0,01-7,5%, что является приемлемым для анализов процессов разработки газожидкостных месторождений. Следует заметить, что машинное время зависит от числа испытаний N и объема информации о структуре области.

Задача Б. Пусть в круговом однородном пласте расположена центральная скважина, работающая в режиме заданного забойного давления, равного $P_{ij}^c = 0$, а контурное давление равно 1 атм., т.е. $\Delta P = 1_{атм.}$. Требуется определить давление в точечной скважине и ее дебит.

Примем радиус контура питания R_k равным 250м, радиус скважины $R_c = 0,1$, шаг сеточной области 41,7м. Решение этой задачи проведено классическим методом Монте-Карло (т.е. при N - кратном испытании решение находится только в одном фиксированном узле), приведенным в работе [13]. Там же дан сравнительный анализ результатов, полученных другими способами.

На рис.2-5 приведены результаты вычислительных экспериментов для различного числа испытаний N по приведенному, алгоритму расчета, которые в отличие от [13], позволяют найти решение на множестве узлов дискретной области.

Анализ результатов, приведенных на рис.4, показывает, что относительная погрешность дебита скважины, полученная по точной формуле и методом Монте-Карло для $N = 2100$, составляет 0,1%.

Проведенные вычислительные эксперименты по решению разнообразных задач, показывают, что метод Монте-Карло является эффективным методом математического моделирования классов задач анализа фильтрационных систем и может быть применен для практического расчета задач анализа более сложных систем со стохастическими распределенными параметрами.

Таблица 2

| Число испытаний | Забойное давление центральной скважины, подсчитанное методом Монте-Карло, атм. | Дебит центральной скважины | | Погрешность метода Монте-Карло |
|-----------------|--|----------------------------|-------------------|--------------------------------|
| | | по методу Монте-Карло | по точному методу | |
| 100 | 154.1304 | 10.749023 | 10.835087 | 0.086064 |
| 200 | 154.0659 | 10.673088 | 10.835087 | 0.162079 |
| 300 | 154.4737 | 11.153121 | 10.835087 | -0.318034 |
| 400 | 154.6307 | 11.337950 | 10.835087 | -0.502863 |
| 500 | 154.3080 | 10.958108 | 10.835087 | -0.123021 |
| 600 | 154.2045 | 10.836231 | 10.835087 | -0.001144 |
| 700 | 154.1176 | 10.733968 | 10.835087 | 0.101119 |
| 800 | 153.9660 | 10.555445 | 10.835087 | 0.279542 |
| 900 | 153.8258 | 10.390337 | 10.835087 | 0.444753 |
| 1000 | 153.6005 | 10.125087 | 10.835087 | 0.710000 |
| 1100 | 153.5626 | 10.080559 | 10.835087 | 0.754528 |
| 1200 | 153.5794 | 10.100350 | 10.835087 | 0.734737 |
| 1300 | 153.5788 | 10.099559 | 10.835087 | 0.735528 |
| 1400 | 153.7621 | 10.315434 | 10.835087 | 0.519653 |
| 1500 | 153.8034 | 10.363959 | 10.835087 | 0.471128 |

| | | | | |
|------|----------|-----------|-----------|----------|
| 1600 | 153.8500 | 10.418874 | 10.835087 | 0.416213 |
| 1700 | 153.8295 | 10.394739 | 10.835087 | 0.440348 |
| 1800 | 153.8123 | 10.375444 | 10.835087 | 0.460643 |
| 1900 | 153.7960 | 10.356309 | 10.835087 | 0.478785 |
| 2000 | 153.7543 | 10.306239 | 10.835087 | 0.528848 |
| 2100 | 153.7007 | 10.243057 | 10.835087 | 0.592030 |
| 2200 | 153.6411 | 10.172981 | 10.835087 | 0.662106 |
| 2300 | 153.6650 | 10.201059 | 10.835087 | 0.634028 |
| 2400 | 153.6275 | 10.156985 | 10.835087 | 0.679102 |
| 2500 | 153.7020 | 10.244680 | 10.835087 | 0.590407 |

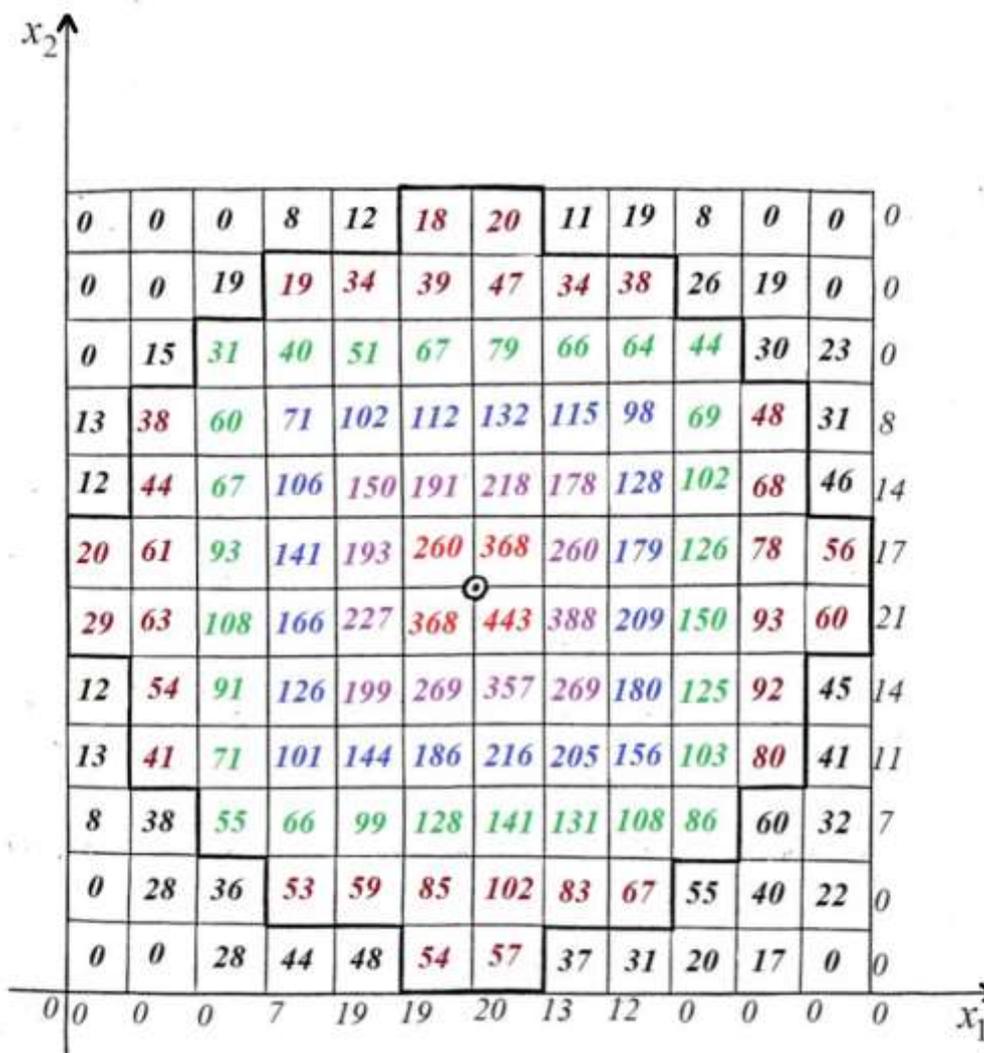


Рис.1 Число остановок и визитов блуждающей частицы, выходящей из точки (7,7) при числе испытаний $N = 1000$

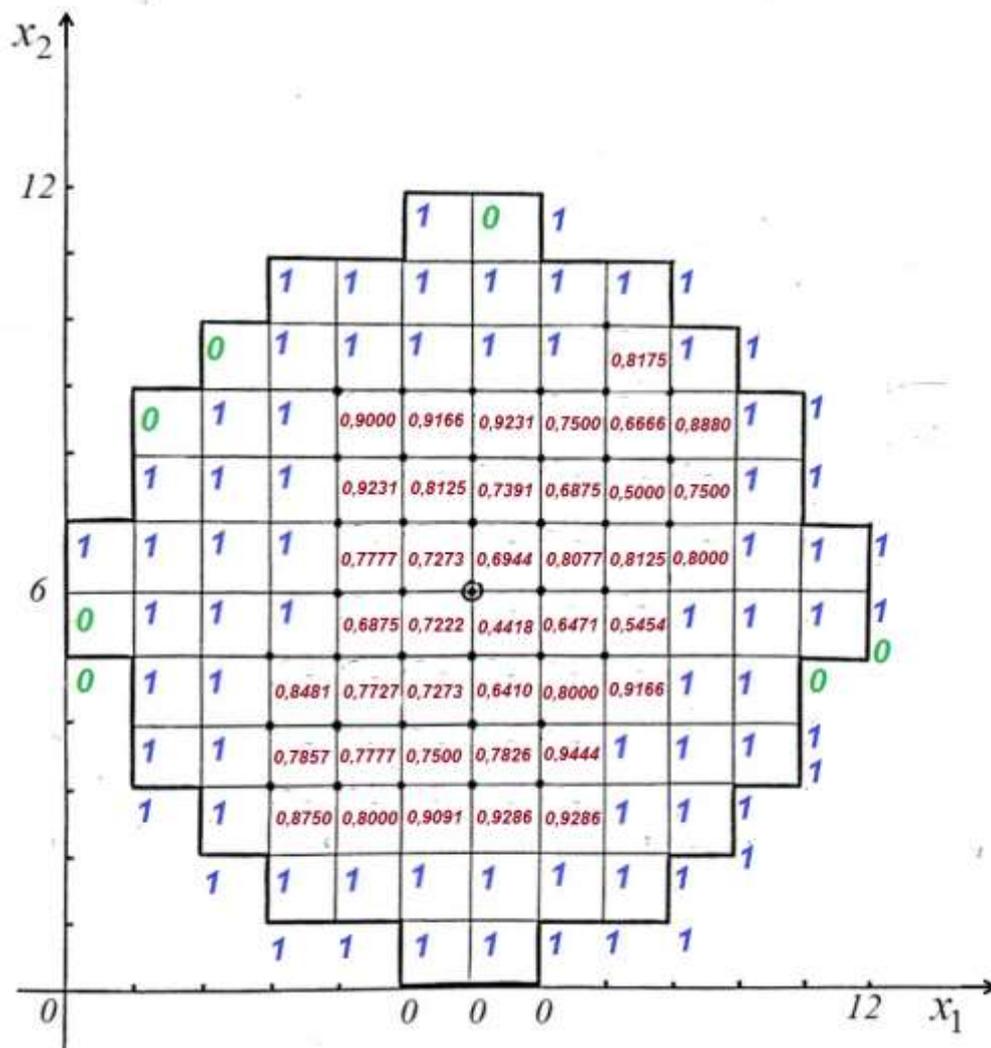


Рис.2 Распределение давлений по узлам сетки, полученное методом Монте-Карло при числе испытаний $N = 100$,
 $Q_{M-K} \approx 0,622056$, $Q_{точ} = 0,80306$

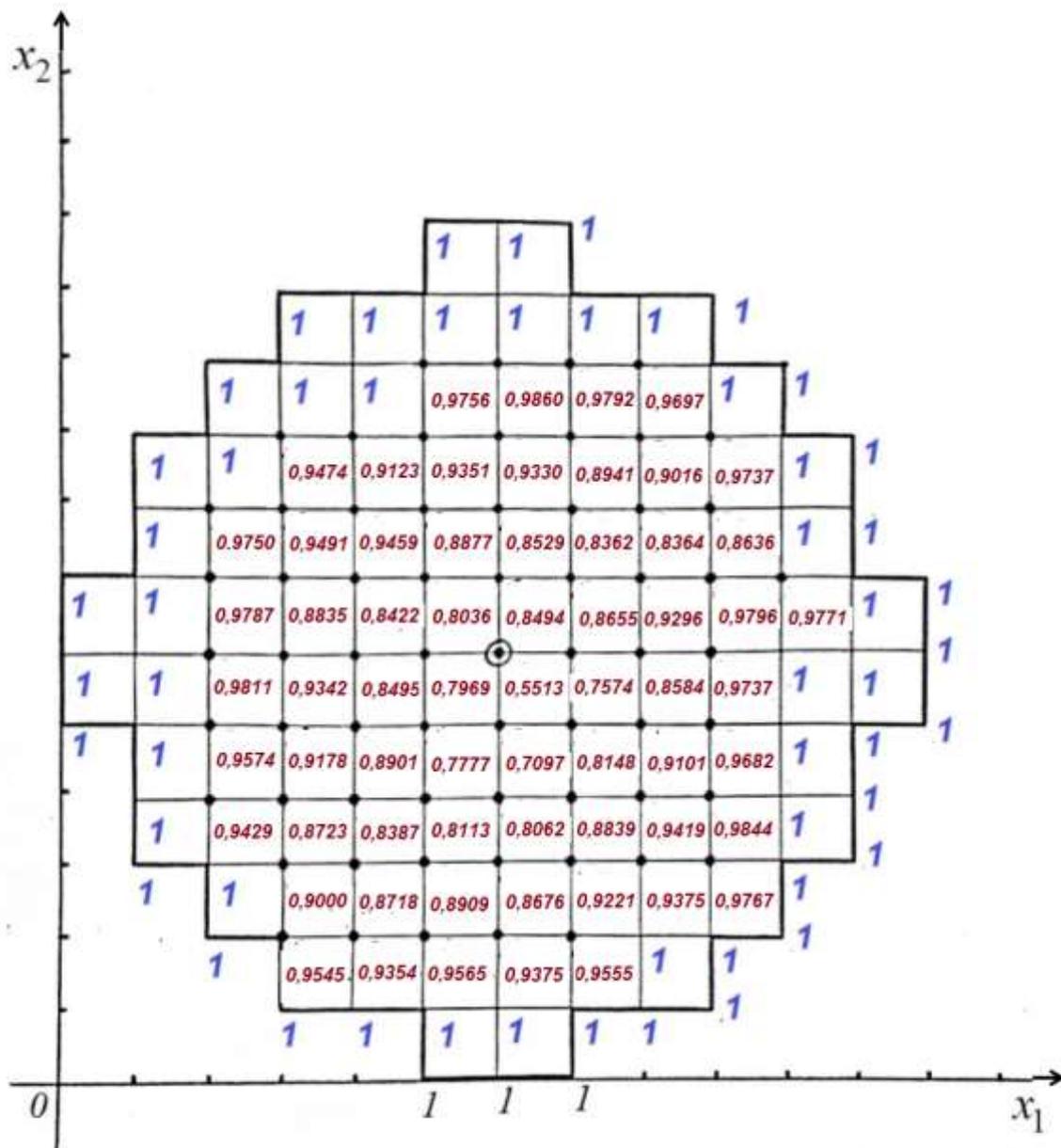


Рис.3 Распределение давлений по узлам сетки, полученное методом Монте-Карло при числе испытаний $N = 600$,
 $Q_{M-K} \approx 0,7761$, $Q_{точ} = 0,80306$

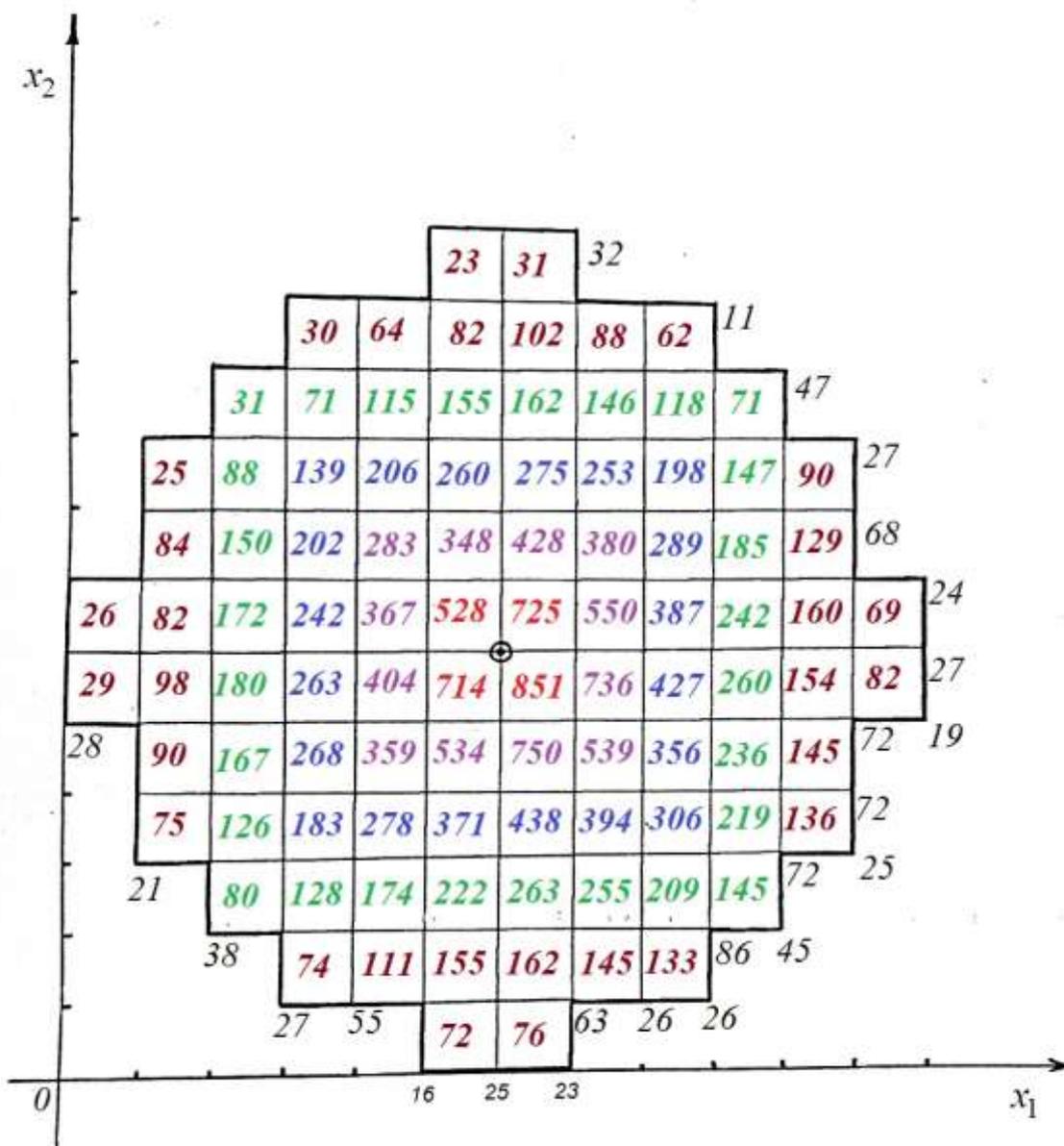


Рис.5 Число остановок и визитов блуждающей частицы, выходящей из точки (6,6) при числе испытаний $N = 2100$

Предложен эвристический алгоритм метода статистических испытаний (Монте-Карло) согласно правилу “блуждания по решетке”. Реализации моделей и алгоритмов расчета в условиях функционирования нефтяных месторождений показала высокую достоверность результатов анализа при заданных геолого-технических ограничениях.

Разработанные алгоритмы и программные средства непосредственно пригодны для проведения практических расчетов и могут быть успешно использованы в математическом обеспечении цифровых технологий разработки нефтяных месторождений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абуталиев Ф.Б., Ахатов Ю.К. Многошаговое вероятностное оценивание при неполной информации и его приложения. - Ташкент: Фан. - 1982. - 64 с.
2. Абуталиев Э.Б., Мороз П.А., Садуллаев Р., Широков В.П. К построению модели управления нефтяным пластом в стационарном режиме методом Монте-Карло и оптимизация отборов на ЭВМ // Вопросы вычислительной и прикладной математики. - Ташкент: РИСО АН УзССР. - 1971. - Вып.8. - С.85-90.
3. Азимов Б.А., Эминов И.Г. Решение задачи управления контуром нефтеносности при произвольном размещении скважин в круговом пласте. Труды АзНИПИ НП, выпуск №4, 1975.
4. Айвазян С.А., Бежаева З.И., Старова О.В. Классификация многомерных наблюдений. - М.: Статистика. - 1974. - 240 с.
5. Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр А.И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. - М.: Наука. - 1979. - 383 с.
6. Аркадьев А.Г., Браверман Э.М. Обучение машины классификации объектов. - М.: Наука. - 1971. - 192 с.
7. Ахметзянов А.В., Булгаков Р.Т. К проблеме выбора обобщенных факторов при анализе структурных свойств и постановке задач оптимизации многосвязных систем. - В кн.: Исследования по теории многосвязных систем. - М.: Наука, 1982. - С.124-131.
8. Байокки К., Мадженес Э. О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы. – Успехи матем. наук, 1974, т. XXIX, вып. 2.
9. Баничук В.И., Петров В.Н. Черноусько Ф.Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 1966, т. 6, № 6.
10. Бекмуратов Т.Ф., Камилов М.М., Рахимов Т.Н. Идентификация химико-технологических объектов. - Ташкент: Фан. - 1970. - 183 с.

11. Bensoussan A. Identification de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Computing methods in optimization problems - 2 (San Remo conference, sept.,9-13, 1968)ed. Zadeh. Neustadt. Balakrishnan. Acad. Press. New York, pp.25-34, 1969.

12. Белаш П.М., Чен-Син Э. О некоторых способах применения интегральных методов при анализе разработки нефтяных и газовых пластов//Тр.МИНХ и ГП. - М.: Недра. - 1965. - Вып.58. - С.3-27.

13. Саульев В.К. Применение метода фиктивных областей для идентификации в случае систем с распределенными параметрами Статистические методы теории управления //Тезисы докладов 1У Всесоюзного совещания. - Фрунзе: - 1978. - М.: Наука. - 1978. - С.145-148.