ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА-СОМИЛИАНА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Усанов К.Х.
Самаркад, СамИЭС
kamoliddin7777@inbox.ru

Аннотатция: В работе приводится интегральная представления решения системы теории упругости в бесконечной области [1].

Пусть R^m $(m \geq 2)$ m-мерное вещественное Евклидово пространство, D-область в R^m с кусочно-гладкой границей ∂D (∂D-состоит из дифференцируемых многообразий размерности $m-1$) и S-гладкий часть ∂D с гладким краем.

Пусть $x=(x_1,...,x_m)$, $y=(y_1,...,y_m)$–точки из R^m и $U(x)$ удовлетворяет в области D однородной системе уравнений Ламе [2] :

$$\mathrm{L}\, U(x)=0, \qquad (1)$$

где $\mathrm{L}=\mu\Delta+(\lambda+\mu)\, grad\, div$, $\Delta-$ оператор Лапласа, λ,μ постоянные Ламе, такие что, $\mu\neq 0$, $\lambda\neq -2\mu$.

Обозначим через $A(D)$ пространство всех регулярных в D (если D – неограниченно, то регулярность требуется лишь в конечных точках ∂D) решений системы уравнений (1).

Если D – ограничено и $U(x)\in A(D)$, то справедлива формула

$$\int_{\partial D}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}ds_y=\begin{cases}U(x), x\in D\\ 0, \quad x\notin D\end{cases} \qquad (2)$$

Пусть $U(x)\in A(D)$, где D – конечносвязная неограниченная область. Обозначим

$$D_R=D\cap\{x\in R^m:|x|<R\},\quad D_R^\infty=D\setminus D_R,\ R>0.$$

Если при каждом $x\in D$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial D_R^\infty}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]ds_y=0,$$

то

$$\int_{\partial D}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}\,ds_y=\begin{cases}U(x), x\in D\\ 0, \quad x\notin \overline{D}\end{cases}$$

Действительно, при фиксированном $x\in D\left(|x|<R\right)$ имеем

$$\int_{\partial D}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]\,ds_y=\int_{\partial D_R}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-$$

$$-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]ds_y+\int_{\partial D_R^\infty}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]ds_y=$$

$$=U(x)+\int_{\partial D_R^\infty}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]\,ds_y.$$

Теперь, устремляя R к бесконечности, получим (2).

Рассмотрим частные случаи формулы (2). Пусть неограниченная область D лежит внутри слоя наименьшей ширины, определяемой неравенством $0<y_m<h,\ h=\dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho>0$, причем ∂D простирается до бесконечности. Будем предполагать, что для некоторого $b_0>0$ площадь удовлетворяет условию роста

$$\int_{\partial D}\exp\left(-b_0\exp\rho_0|y'|\right)ds_y<\infty,\ 0<\rho_0<\rho,\quad y'=(y_1,\ldots y_{m-1})\in R^{m-1}$$

Пусть $U(x)\in A(D)$ удовлетворяет условию роста

$|U(y)|+|T(\partial y,n)U(y)|\le C\exp\left(\exp\rho_2|y'|\right),\quad \rho_2<\rho,\ y=(y',y_m)\in D.$ (3)

Функцию $\phi(y,x)$ при $\alpha>0$ определим следующими равенствами: если $m=2$, то

$$-2\pi\,K(x_2)\phi\,(y,x)=\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{K\left(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2\right)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2-v_2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},$$

Если $m=2n+1, n\ge 1$, то

$$C_mK(x_m)\phi\,(y,x)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{K\left(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_m\right)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_m-x_m}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}$$

где $C_m=(-1)^{n-1}\cdot 2^{-n}(m-2)\pi\,\omega_{ni}(2n-1)!$,

Если $m=2n, n\ge 2$, то

$$C_mK(x_m)\varphi(y,x)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-2}}\operatorname{Im}\frac{K(i\alpha+y_m)}{\alpha(i\alpha+y_m-x_m)},$$

где $C_m = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(m-2)\omega_m$.

С помощью функции $\phi(y,x)$ построим матрицу

$$\Pi(y,x) = \left\|\Pi_{ij}(y,x)\right\|_{mxm} = \left\|\frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\phi(y,x) - \frac{(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)}(y_j - x_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(y,x)\right\|_{mxm}$$

$i, j, = 1,2,...,m$

$$K(\omega) = \exp\left(-bchi\rho_1\left(\omega - \frac{h}{2}\right) - b_1 chi\rho_0\left(\omega - \frac{h}{2}\right)\right),$$

Где

$$\omega = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_m,\ 0<\rho_2<\rho_1<\rho,\ \ 0<x_m<h,\ b>0,\ \ b_1 > b_0\left(\cos\rho_0\frac{h}{2}\right)^{-1},\ \alpha = |y'-x'|.$$

Чтобы получить формулу (2) для данной области докажем

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial D_R^\infty}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]ds_y = 0$$

Действительно, по (3) при фиксированном $x\in D$

$$\left|\int_{\partial D_R^\infty}[\Pi(y,x)\{T(\partial y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x)\}]ds_y\right| \le \cdot$$

$$\int_{\partial D_R^\infty}[|\Pi(y,x)| + |T(\partial y,n)\Pi(y,x)|]\cdot[|U(y)| + |T(\partial y,n)U(y)|]ds_y \le$$

$$\le \int_{\partial D_R^\infty}\tilde{C}\,s^{\frac{1-2n}{2}}\exp\left(-b\cos\rho_1\left(y_m - \frac{h}{2}\right)\cdot ch\rho_1\sqrt{s} - b_1\cos\rho_0\left(y_m - \frac{h}{2}\right)ch\rho_0\sqrt{s}\right)$$

$$\cdot\exp\left((y_m - x_m) - b\cos\rho_1\left(x_m - \frac{h}{2}\right) - b_1\cos\rho_0\left(x_m - \frac{h}{2}\right)\right)\exp\left(\exp\rho_2|y'|\right)ds_y \le$$

$$\le \tilde{C}\exp(-x_m)\cdot\exp\left(h - b\cos\rho_1\left(x_m - \frac{h}{2}\right) - b_1\cos\rho_0\left(x_m - \frac{h}{2}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{\partial D_R^\infty}\frac{1}{|y'|^{2n-1}}\exp\left(-b\cos\rho\left(y_m - \frac{h}{2}\right)ch\rho_1|y'| - b_1\cos\rho_0\left(y_m - \frac{h}{2}\right)ch\rho_0|y'| + \exp\rho_2|y'|\right)\ ds_y.$$

В последнем звене неравенства, подынтегральноевыражениепри $R\to\infty$ или тоже самое, что при $|y'|\to\infty$ стремится к нулю равномерно [3] и поэтому выполняется равенство (2).

Полученные результаты приводим для R^2 как эти две теоремы

Теорема 1. Пусть $u(x) \in A_\rho(D)$ удовлетворяет граничномуусловию роста

$a \geq 0, y \in \partial D.$

Если то справедлива равенства

$$u(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y,x)\{T(\partial_y, n)u(y)\} - \mathbf{u}(\mathbf{y})\{T(\partial_y, n)\Pi(y,x)\}]ds_y\,, \qquad x \in D.$$

Здесь

$$D = \{y = (y_1, y_2): 0 < y_2 < h, \qquad h = \pi/\rho, \qquad \rho > 0, \qquad -\infty < y_1 < \infty\}$$

$$A_\rho(D) = \{u(y): u(y) \in A(D), |u(y)| + |grad u(y)| \leq \exp[o(\exp\rho|y_1|)], y \to \infty, \rho > 0\}$$

$A(D)$ – класс всех регулярных решений системы (1).

Теорема 2. Пусть $u(x) \in A_\rho(D)$, где D – область из полуплоскости $y_2 > 0$, с границей простирающихся до бесконечности и заданным уравнением $y_2 = f(y_1)$, причем $f(y_1)$ –дифференцируемая функция и $0 \leq f(y_1) \leq y_0 < \infty,$ удовлетворяет граничному условию:

$$\int_{\partial D} \frac{|u(y)|}{1 + |y|^2} ds_y < \infty, \qquad \int_{\partial D} \frac{|T(\partial_y, n)u(y)|}{1 + |y|} ds_y < \infty.$$

Если $\rho < 1$, то

$$u(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y,x)\{T(\partial_y, n)u(y)\} - \mathbf{u}(\mathbf{y})\{T(\partial_y, n)\Pi(y,x)\}]ds_y\,, \qquad x \in D.$$

Использование литературы

1. Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Задача Коши для системы теории упругости в бесконечной области. // Узбекский матем. журнал. 1999. №2. С. 34-39.
2. Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В., Гегелия Т. Г. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисление. М. 1969. Т. 2. Ст. 600.