СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕНОРМАЛИЗАЦИЙ

Каршибоев Хайрулло Киличович
канд.физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедры
“Высшей математики”,
Самаркандский институт экономики и сервиса,
Республика Узбекистан, г.Самарканд
E-mail: karshiboyev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В этом работе доказано, что параметры a_n, b_n, m_n, c_n*-асимптотически линейно зависимы при* $n \to \infty$.

Ключевые слова: *гомеоморфизмов окружности, определяющая функция, дробно-линейными, ренормализационной, число вращения.*

RELATIONS FOR RENORMALIZATION COEFFICIENTS

Karshiboev Khayrullo Kilichovich
Candidate of Physics and Mathematics Sciences,
Associate Professor, Head. departments
"Higher Mathematics"
Samarkand Institute of Economics and Service,
Republic of Uzbekistan, Samarkand
E-mail: karshiboyev@mail.ru

ABSTRACT

In this paper, it is proved that the parameters are a_n, b_n, m_n, c_n *-asymptotically linearly dependent as* $n \to \infty$.

Keywords: *circle homeomorphisms, defining function, linear-fractional, renormalization, rotation number.*

Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории нелинейных систем.

Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А.Пуанкаре в связи с задачами небесной механики [5].

Классическая теорема Данжуа утверждает, что диффеоморфизм окружности из класса $C^2(S^1)$ топологически сопряжен с линейным поворотом T_ρ, т.е. существует гомеоморфизм φ такой, что $\varphi \circ T_f = T_\rho \circ \varphi$. В теории одномерных отображений центральной является проблема гладкости сопряжения φ. Для диффеоморфизма окружности эта проблема была решена в определенном смысле полностью в конце 1980 –ых годов в работах Синая и Ханина, Кацнельсона и Орнстейна. При этом существенно использовался метод ренормализационной группы (РГ).

В теории динамических систем метод РГ впервые был использован М.Фейгенбаумом в 1978 году, для построения теории универсальности. Этот метод с успехом применяется для изучения гомеоморфизмов окружности. Синай и Ханин доказали, что ренормализации диффеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1)$, $\varepsilon > 0$, с иррациональным числом вращения, аппроксимируются (в C^2-норме) линейными отображениями.

Важным классом с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами. Поведение ренормализаций для гомеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения изучалось Вул и Ханиным. Естественным является изучение поведения ренормализаций гомеоморфизмов окружности с изломами с более низкой гладкостью [4].

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T_f единичной окружности

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0,1) \tag{1.1}$$

где скобка $\{\cdot\}$- обозначает дробную часть числа, а $f(x)$-определяющая функция T_f, удовлетворяет следующим условиям:

(c_1) $f(x)$ -непрерывная, строго возрастающая функция на R^1;

(c_2) $f(x+1) = f(x)+1$ для любого $x \in R^1$;

(c_3) гомеоморфизм $T_f x$ в точке $x = x_b$ имеет излом, т.е. существуют конечные односторонние производные $f'(x_b \pm 0) > 0$ и $f'(x_b - 0) \neq f'(x_b + 0)$;

(c_4) $f'(x)$-абсолютно непрерывная функция на $[x_b, x_b + 1]$ и $f'' \in L_p(S^1; dl)$ при некотором $p > 1$.

Число $\sigma=\sigma_f(x_b)=\dfrac{f'(x_b-0)}{f'(x_b+0)}$ называется величиной излома T_f в точке $x=x_b$. Условие (c_4) называется условием гладкости Кацнельсона и Орнстейна [3].

Пусть число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально и разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид:

$$\rho=[k_1,k_2,...,k_n,...].$$

Положим

$$\frac{p_n}{q_n}=[k_1,k_2,...,k_n],\quad n\geq 1.$$

Числа q_n-удовлетворяют разностному уравнению:

$$q_{n+1}=k_{n+1}q_n+q_{n-1},\quad q_0=1,\ q_1=k_1,\quad n\geq 1.$$

Обозначим особую точку x_b через x_0 и рассмотрим ее итерации, т.е. $x_i=T_f^i x_0,\ i\geq 1$. Обозначим $\Delta_0^{(n)}=\Delta_0^{(n)}(x_0)$-замкнутый отрезок соединяющий точки x_0 и x_{q_n}.

Обозначим через $V_n=V_n(x_0)$ замкнутый интервал соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. Ясно, что $V_n=\Delta_0^{(n)}\cup\Delta_0^{(n+1)}$. Интервал V_n-называется n-ой ренормализационной окрестностью точки x_0. Определим отображение Пуанкаре по формуле:

$$\pi_n(x)=\begin{cases}T_f^{q_{n+1}}x, & если\ \ x\in\Delta_0^{(n)}\setminus\{x_0\},\\ T_f^{q_n}x, & если\ \ x\in\Delta_0^{(n+1)}.\end{cases}\qquad (1.2)$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) нас интересует главным образом поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$, при $n\to\infty$. Поскольку длина отрезка V_n экспоненциально стремится к нулю и $q_n\to+\infty$ при $n\to\infty$, поведение $\pi_n(x)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах.

Введем перенормированные координаты z на V_n:

$$z=\frac{x-x_0}{x_0-x_{q_n}},\quad x\in V_n \qquad (1.3)$$

Обозначим $a_n = \dfrac{x_{q_{n+1}} - x_0}{x_0 - x_{q_n}}$. Очевидно, что $a_n > 0$. При $x \in V_n$, соответствующие координаты z принимают значения от -1 до a_n. В новых координатах отображению π_n соответствует следующая пара (f_n, g_n):

$$f_n(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_n}},$$
$$g_n(z) = \frac{f^{q_n}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_n}{x_0 - x_{q_n}}, \tag{1.4}$$

Пара функции $(f_n,\ g_n)$ называется n-ой ренормализацией отображения π_n. Положим $\Delta_i^{(n)} = T_f^i \Delta_0^{(n)}$, $i \ge 1,\ n \ge 1$. Пусть для определенности n-нечетное число, тогда имеет место соотношение $x_{q_{n+1}} \prec x_0 \prec x_{q_n}$.

Система отрезков $\xi_n = \{\Delta_i^{(n+1)},\ 0 \le i < q_n;\ \Delta_j^{(n)},\ 0 \le j < q_{n+1}\}$ образует разбиение окружности [6]. При этом соседние два отрезки из ξ_n пересекаются одной лишь концевой точкой.

В этом работе, мы покажем что пара функции $\left(f_n(z), g_n(z)\right)$ являются почти дробно-линейными функциями.

Рассмотрим семейство пар дробно-линейных функций вида

$$F_{a,b,m}(z) = \frac{a + (a + bm)z}{1 + (1 - m)z}, \quad G_{a,b,m,c}(z) = \frac{-ac + (c - bm)z}{ac + (m - c)z}. \tag{1.5}$$

Это семейство играет исключительно важную роль в теории гомеоморфизмов с изломами, поскольку ренормализации $\left(f_n, g_n\right)$ таких гомеоморфизмов приближаются к семейству пар вида (1.5), в пределе при $n \to \infty$. Более точно, справедливо следующее утверждение. Пусть T_f - произвольный гомеоморфизм, поднятие функция f, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$, а число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально. Положим $c_n = \sigma$ для чётных n и $c_n = \dfrac{1}{\sigma}$ для нечётных, где σ -величина излома. Обозначим

$$b_n = \frac{x_{q_n + q_{n+1}} - x_0}{x_{q_n} - x_0}, \qquad a_n = \frac{x_0 - x_{q_{n+1}}}{x_{q_n} - x_0}.$$

Теорема 1. Пусть поднятие гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально. Тогда при всех $n \ge 1$ для параметров a_n, b_n, m_n, c_n дробно- линейных функций $F_n(z)$ и $G_n(z)$ справедливо следующее соотношение

$$|a_n + b_n m_n - c_n| \le const\ a_n \cdot \lambda_n,$$

где последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ зависит только от гомеоморфизма T_f.

Доказательство. Заметим, что отображения отвечающие функциям (f_n, g_n) коммутируют, поскольку они определяются степенями одного и того же гомеоморфизма окружности T_f. Пусть n-четно. Обозначим $\overline{B}_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+q_{n+1}}} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy$ $0 \le i < q_{n+1}$. Имеем $\exp\left(\sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} \overline{B}_i\right) \cdot m_{n+1}^{-1} = \int\limits_{S^1} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy = \sigma$, где σ -величина излома. Если n-нечетно, то $\exp\left(\sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} \overline{B}_i\right) \cdot m_{n+1}^{-1} = \frac{1}{\sigma}$. Таким образом $m_{n+1} = c_n \cdot \exp\left(\sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} \overline{B}_i\right)$.

Лемма 1. *Имеет место следующее равенство*

$$m_{n+1} = c_n(1 + a_n \cdot a_{n-1}(m_n - 1))\exp(\chi_n), \qquad (2.1)$$

где $|\chi_n| \le const \cdot a_n a_{n-1} \lambda_n, \quad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$

Доказательство. Обозначим d_i относительную координату точки $x_{q_{n+2}+i}$ внутри отрезка $[x_{q_n+i}; x_i]$:

$$d_i = \frac{x_i - x_{i+q_{n+2}}}{x_i - x_{i+q_n}}, \quad 0 \le i \le q_{n+1} \qquad (2.2)$$

Очевидно, что

$$d_0 = a_n \cdot a_{n+1}.$$

В силу теоремы 1

$$d_i = \frac{d_0 m_i \exp(\tau_i)}{1 + d_0(m_i \exp \tau_i - 1)}, \qquad (2.3)$$

где $$m_i = \exp\left(\sum_{j=0}^{i-1} B_j\right), \quad \tau_i = \sum_{j=0}^{i-1} \psi_j.$$

Легко видеть, что $\overline{B}_j = b_j \cdot B_j + \xi_j$, и $\sum\limits_{j=0}^{q_{n+1}-1} \xi_j = \eta_n$, $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$.

Поскольку

$$\ln\left(1+b_0\left(m_{i+1}\exp\tau_{i+1}-1\right)\right)-\ln\left(1+b_0\left(m_i\exp\tau_i-1\right)\right)=$$

$$=\ln\left[1+\frac{b_0 m_i\exp\tau_i\cdot B_i}{1+b_0\left(m_i\exp\tau_i-1\right)}+\frac{b_0 m_i\exp\tau_i}{1+b_0\left(m_i\exp\tau_i-1\right)}\cdot\left(\exp(B_i+\tau_{i+1}-\tau_i)-1-B_i\right)\right]=$$

$$=\ln\left[1+\frac{b_0 m_i\exp\tau_i}{1+b_0\left(m_i\exp\tau_i-1\right)}+\frac{b_0 m_i\exp\tau_i}{1+b_0\left(m_i\exp\tau_i-1\right)}\left(\exp(B_i+\psi_i)-1-B_i\right)\right]=$$

$$=\frac{b_0 m_i\exp\tau_i\cdot B_i}{1+b_0\left(m_i\exp\tau_i-1\right)}+\zeta_i.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\zeta_i=\gamma_n,\ \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2 \tag{2.4}$$

Получаем

$$\ln\left(\frac{1}{c_n}m_n\right)=\sum_{i=0}^{q_n-1}\overline{B}_i=\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\left(b_i\overline{B}_i+\xi_i\right)=\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\left(\frac{b_0 m_i\exp\tau_i\cdot B_i}{1+b_0(m_i\exp\tau_i-1)}+\xi_i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\left[\ln\left(1+b_0(m_{i+1}\exp(\tau_{i+1})-1\right)-\ln\left[1+b_0(m_i\exp\tau_i-1)\right]\right]+$$

$$\begin{gathered}+\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\left(\xi_i-\zeta_i\right)=\ln\left(1+b_0(m_{n-1}\exp\tau_{q_n}-1)\right)-\ln\left(1+b_0(m_0\exp\tau_0-1)\right)+\\ +\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\left(\xi_i-\zeta_i\right)=\ln\left(1+b_0(m_{n-1}-1)\right)+\chi^{(n)}\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\left|\chi^{(n)}\right|\le b_0\cdot(|\gamma_n|+|\eta_n|)$. Ясно, что $\{\chi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$. Лемма 1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы 1. Обозначим $r_n=a_n+b_n\cdot m_n-c_n$. Используя утверждение леммы 1 легко показать, что

$$r_n=c_n\cdot a_n\cdot r_{n-1}+\delta_n,\ \text{где}\quad\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2 \tag{2.6}$$

Поскольку

$$b_n=\frac{f_{n-1}\left(-a_n\cdot a_{n-1}\right)}{a_{n-1}}=\frac{F_{a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1}}\left(-a_n\cdot a_{n-1}\right)}{a_{n-1}}+\frac{\nu_n}{a_{n-1}},$$

где $\nu_n=f_{n-1}\left(-a_n\cdot a_{n-1}\right)-F_{a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1}}\left(-a_n\cdot a_{n-1}\right)$. Получаем:

$$r_n = a_n + b_n \cdot m_n - c_n = a_n + c_n[1-(a_{n-1}+b_{n-1}m_{n-1})a_n]\exp(\chi_n) + \frac{\nu_n}{a_{n-1}} - c_n =$$

$$= c_n a_n\left(\frac{1}{c_n} - a_{n-1} - b_{n-1}m_{n-1}\right) + [c_n a_n(a_{n-1}+b_{n-1}m_{n-1}) - c_n](1-\exp(\chi_n)) + \frac{\nu_n m_n}{a_{n-1}} =$$

$$= -c_n a_n r_{n-1} + \delta_n\,,$$

где $\delta_n = c_n[a_n(a_{n-1}+b_{n-1}m_{n-1})-1](1-\exp(\chi_n)) + \dfrac{m_n\nu_n}{a_{n-1}}$

Учитывая теорему 1, получаем

$$\left|\frac{m_n\nu_n}{a_{n-1}}\right| = m_n\left|\frac{f_{n-1}(-a_n a_{n-1}) - F_{a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1}}(-a_n a_{n-1})}{a_{n-1}}\right| \le const\, a_n \cdot \lambda_n\,,$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$, откуда следует оценка (2.6) для δ_n.

Итерируя равенство (2.6) получаем:

$$r_n = r_1\prod_{j=2}^{n}(-c_j a_j) + \sum_{i=2}^{n}\delta_n\prod_{j=i+1}^{n}(-c_j\delta_j)\,.$$

Используя лемму 1 получим, что

$$\left|\prod_{j=i}^{n}(-c_j a_j)\right| = c_n a_n\left|\frac{x_0 - x_{q_n}}{x_0 - x_{q_i}}\right| = const\ a_n\ \lambda^{n-i}\,,$$

где $\lambda \in (0;1)$. Имеем $r_n \le const\, a_n \sum_{i=2}^{n}\lambda^{n-i}\cdot\delta_i$. Легко можно показать, что если $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$, тогда $\left\{\sum_{i=2}^{n}\lambda^{n-i}\delta_i\right\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$.

Таким образом

$$|r_n| \le const\ a_n\lambda_n, \quad \text{и} \quad |a_n + b_n m_n - c_n| \le const\ a_n\lambda_n, \quad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2\,.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. //Функционал анализ и его приложения. - 1998.-№32(3). с.11-21.
2. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома. // Успехи математических наук. – Москва: 2004.- т. 59. вып. 1(355), с. 185-186.
3. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. // Ergodic Theory Dynam.Systems.-1989.- No. 9(4), p. 643-680.
4. Khanin K.M. and Vul E.V. Circle Homeomorphisms with weak Discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, v. 3, 1991, p. 57-98.
5. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. –М.: Наука, 1980.
6. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. - М.: Наука, 1995.