NORMAL TAQSIMOT VA UNING TADBIQLARI

Ismatov Utkir Rustamovich
Samarqand iqtisodiyot va servis instituti o‘qituvchisi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ko‘plab sohalarda keng qo‘llaniladigan normal taqsimot qonuni o‘rganilgan va normal taqsimot qonunidan foydalanib amaliy masalalar yechilgan.*

Kalit so‘zlar: *Tasodifiy miqdor, taqsimot qonuni, Laplas funksiyasi, o‘rta qiymat, o‘rtacha kvadratik chetlanish.*

Аннотация: *В данной статье изучается широко используемый во многих областях закон нормального распределения и решаются практические задачи с использованием закона нормального распределения.*

Ключевые слова: *Случайная величина, закон распределения, функция Лапласа, среднее значение, среднеквадратичное отклонение.*

Abstract: *In this article, the law of normal distribution, widely used in many areas, is studied and practical problems are solved using the law of normal distribution.*

Key words: *Random variable, distribution law, Laplace function, mean value, standard deviation.*

Qishloq xo‘jaligi, iqtisod, tibbiyot va boshqa sohalarga doir amaliy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladigan muhim taqsimot funksiyalaridan biri normal taqsimotdir.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimotni differensial funksiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

Bu yerda $-\infty<a<+\infty$, $-\infty<\sigma<+\infty$, a va σ lar normal taqsimotni parametrlari, a - matematik kutishi ya’ni $M(X)=a$, σ - normal taqsimotning o‘rtacha kvadratik chetlanishi.

Normal taqsimotni taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz \qquad (2)$$

bo‘lgani uchun normallashtirilgan($a=0$, $\sigma=1$) normal taqsimotni taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \tag{3}$$

bo‘ladi.

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - Laplas funksiyasi ekanini eslab, X tasodifiy miqdorni berilgan oraliqqa tushish ehtimolidan

$$P(0<X<x)=\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x)\,. \tag{4}$$

Normal taqsimotda a - o‘rta qiymatni ko‘rsatadi. σ esa o‘rtacha kvadratik chetlanishini, σ ning o‘sishi bilan normal taqsimot grafigining cho‘qqisi pasayib boradi, ya’ni tarqoqlik ko‘payadi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa hamda $f(x)$ uni taqsimot zichligi funksiyasi bo‘lsa, X ni (α,β) oraliqqa tushish ehtimoli

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx\,. \tag{5}$$

Agar X normal taqsimlangan bo‘lsa,

$$P(\alpha\le X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{6}$$

integralga ega bo‘lamiz. Buni integrallash uchun o‘zgaruvchini almashtiramiz.

$$z=\frac{x-a}{\sigma},\ x=\sigma z+a,\ dx=\sigma dz$$

$x=\alpha$ bo‘lsa, $z=\frac{\alpha-a}{\sigma}$, $x=\beta$ bo‘lsa, $z=\frac{\beta-a}{\sigma}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-z^2/2}(\sigma dz)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0}e^{-z^2/2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(\beta-a)/\sigma}e^{-z^2/2}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(\beta-a)/\sigma}e^{-z^2/2}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(\alpha-a)/\sigma}e^{-z^2/2}dz.$$

Shunday qilib, Laplas funksiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dx$$

ekanini e'tiborga olsak,

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (7)$$

kelib chiqadi.

Ko‘p hollarda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni chetlanishini $X-a$ ni absolyut qiymati bo‘yicha biror $\delta>0$ sondan kichik qiymat qabul qilishini baholashga to‘g‘ri keladi, ya'ni

$$|x-a|<\delta$$

tengsizlikning ro‘y berish ehtimolini topish talab qilinadi. Bu tengsizlikni quyidagi ikkilangan tengsizlik bilan almashtiramiz:

$$-\delta<x-a<\delta$$

bu tengsizlikning hamma tomoniga a ni qo‘shsak,

$$a-\delta<x<\delta+a$$

qo‘sh tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak,

$$P(|X-a<\delta|)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right]=$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

(Bu yerda $\Phi(x)$ funksiyani juftligi hisobga olindi).

Shunday qilib, $$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

(8)

Agar $a=0$ bo‘lsa, $$P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Bu ehtimol a ga bog‘liq bo‘lmasdan oraliqni uzunligiga, to‘g‘ri proporsional va o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ga teskari proporsionaldir.

1-misol. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyaga ega bo‘lsin:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Sinash natijasida X tasodifiy miqdor (0,1) intervalda yotgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: Uzluksiz tasodifiy miqdorni (a,b) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli (4) formulaga asosan

$$P(0<x<1)=F(1)-F(0)=2/3-1/3=1/3.$$

2-misol. Tovuqchilik fermasidan jo'natilayotgan tuxumlarning o'rtacha og'irligi (a) 60 g. va o'rtacha kvadratik chetlanish (σ) 5 g. ga teng. Tuxum og'irligini X normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarab jo'natilayotgan tuxumlar ichida og'irliklari 1) 50 grammdan 70 grammgacha bo'lgan tuxumlar qancha foizni tashkil qilishini; 2) tasodifiy olingan tuxum og'irligini uning o'rtacha og'irligidan absolyut qiymati bo'yicha 5 g. dan oshmaslik ehtimolini hamda 3) og'irligi 70 grammdan ortiq bo'lgan tuxumlar foizini toping.

Yechish. X tasodifiy olingan tuxum og'irligi bo'lsin, masala shartiga asosan $a=M(X)=60$ gramm, $\sigma=5$ gramm. 1) $\alpha=50$, $\beta=70$ topish kerak $P\{50<X<70\}=?$

Tasodifiy miqdor X-normal taqsimlanganligidan yuqoridagi (7) formulaga asosan talab qilinadigan ehtimol:

$$P\{50<x<70\}=\Phi\left(\frac{70-60}{5}\right)-\Phi\left(\frac{50-60}{5}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)$$

Bu yerda $\Phi(x)$ toq funksiya bo'lganligidan, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ va Laplas funksiyasining qiymatlari jadvalidan $\Phi(2)=0,4772$ ekanligi bilgan holda quyidagi yechimni olamiz:

$P\{50<X<70\}=\Phi(2)+\Phi(2)=2\Phi(2)=2\cdot 0,4772=0,9544$

Demak, jo'natilayotgan tuxumlar ichida og'irliklari 50 grammdan to 70 grammgacha bo'lganlari umumiy tuxumlarning 95% dan ortiqrog'ini tashkil etar ekan.

2) $a=60,\ \delta=5,\ \sigma=5$ talab qilingan $P\{|x-60|<5\}=?$

Bu ehtimolni yuqoridagi (8) formula yordamida topiladi:

$$P\{|x-60|<5\}=2F(5/5)=2\Phi(1)$$

Laplas funksiyasining qiymatlar jadvaldan foydalanib $F(1)=0,3413$ ekanligidan

$$P\{|x-60|<5\}=2F(5/5)=2F(1)=2\cdot 0,3412=0,6826.$$

3) Masala shartiga asosan $\alpha=70$ va talab qilingan $P\{70<x\}=?$

Ehtimol $P\{70<x\}=P\{70<x<\infty\}=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{70-60}{5}\right)=0,5-\Phi(2)$

Laplas funksiyasining qiymatlar jadvalidan foydalanib $\Phi(\infty)=0,5$ $\Phi(2)=0,4772$, u holda talab qilingan ehtimol

$$P\{70<x\}=P\{70<x<\infty\}=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{70-60}{5}\right)=0,5-\Phi(2)=0,5-0,4772=0,0228.$$

Demak, og'irligi 70 grammdan kata bo'lgan tuxumlar jami fermadan jo'natilgan tuxumlarning 2% ini tashkil qilar ekan.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. В.Е.Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент. “Ўқитувчи” .1980. -366 с.
2. A.R.Xashimov va boshqalar. Iqtisodiy matematika. –Toshkent. “Fan va texnologiyalar”. 2018.352 b.
3. X.Q.Qarshiboyev. Ekonometrika. Darslik. -Toshkent. “Iqtisod-moliya”. 2021. -460 b.
4. K.Sh.Ruzmetov, G‘.X.Djumabayev. Matematika. Darslik. “O‘zbekiston xalqaro islom akademiyasi” nashriyot-matbaa birlashmasi. Toshkent – 2020 y.